

## บทที่ 10 การวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมใน Frequency Domain

### วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

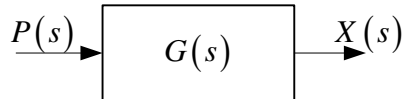
1. วิเคราะห์การตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุตที่เป็นฟังก์ชัน sinusoidal
2. วาดภาพ Bode diagram ของระบบที่กำหนดให้
3. วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบควบคุมจาก Bode diagram ได้
4. ใช้ Bode diagram ในการออกแบบระบบควบคุมของระบบ

### 10.1. การวิเคราะห์ระบบใน Frequency Domain

ในตอนนี้เราจะกล่าวถึงการตอบสนองของระบบต่ออินพุตที่เป็นสัญญาณ sinusoidal เมื่อมีอินพุตสัญญาณ sinusoidal มากกระทบกับระบบ ระบบจะเริ่มแกว่งที่ความถี่ธรรมชาติของมันก่อน ถ้าระบบมี damping (ซึ่งระบบส่วนใหญ่ในธรรมชาติมี) การแกว่งด้วยความถี่ธรรมชาติจะค่อยๆ ลดแอมพลิจูดลงและหายไปในที่สุด ทำให้เมื่อเวลาผ่านไปนานหรือที่ steady state เหลือแต่ส่วนของการแกว่งที่มีความถี่เท่ากับความถี่ของอินพุต

คำจำกัดความของการตอบสนองเชิงความถี่ หรือ frequency response คือ steady-state response ของระบบต่ออินพุตที่เป็น sinusoidal ซึ่งการตอบสนองนี้จะอธิบายได้ด้วย amplitude ratio และ phase angle สำหรับความถี่ต่างๆ ตั้งแต่ศูนย์จนถึงอนันต์

#### 10.1.1. Sinusoidal Transfer Function



แอมพลิจูดและเฟสของการตอบสนองสำหรับอินพุตความถี่ต่างๆ  $\omega$  สามารถหาได้ง่ายโดยการหาขนาดและมุมของ  $G(j\omega)$  นั่นคือการแทนค่า  $s = j\omega$  ดังนี้

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega)$$

ซึ่งสำหรับอินพุตที่เป็น sinusoidal

$$p(t) = P \sin \omega t$$

จะได้เอาท์พุตที่ steady state เป็น

$$\begin{aligned} x_{ss}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \\ &= P |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \\ &= PA \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

โดยที่  $A = |G(j\omega)|$  = amplitude ratio ของเอาท์พุตส่วนอินพุต

$\phi = \angle G(j\omega)$  = phase shift ของเอาท์พุตเทียบกับอินพุต

เราเรียก  $G(j\omega)$  นี้ว่าเป็น sinusoidal transfer function

#### 10.1.2. การพิสูจน์ Sinusoidal Transfer Function

ในที่นี้เราต้องการแสดงว่าถ้าเรามีอินพุตที่เป็นฟังก์ชัน sinusoidal

$$p(t) = P \sin \omega t$$

กระทำต่อระบบที่มี transfer function  $G(s)$  เราจะได้ frequency response เป็น

$$x_{ss}(t) = P |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad \text{โดยที่ } \phi = \angle G(j\omega)$$

สมมติให้

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

สำหรับอินพุท sinusoidal

$$P(s) = \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2}$$

จะได้

$$\begin{aligned} X(s) &= G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{b_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{b_n}{s+p_n} \end{aligned}$$

แปลงลาปลาซจะได้

$$x(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-p_1t} + b_2e^{-p_2t} + \cdots + b_n e^{-p_nt}$$

ซึ่งตั้งแต่เทอมที่สามเป็นต้นไปจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  ทำให้ที่ steady state

$$x_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = G(-j\omega) \frac{P}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{P}{2j} \end{aligned}$$

เนื่องจากเราสามารถเขียน  $G(j\omega)$  ในรูป complex exponential ได้เป็น

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad \text{โดยที่ให้ } \phi = \angle G(j\omega)$$

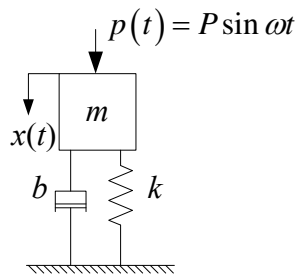
และ

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_{ss}(t) &= -\frac{P}{2j} |G(j\omega)| e^{-j(\phi+\omega t)} + \frac{P}{2j} |G(j\omega)| e^{j(\phi+\omega t)} \\ &= P |G(j\omega)| \frac{e^{j(\phi+\omega t)} - e^{-j(\phi+\omega t)}}{2j} \\ &= P |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad \square$$

**ตัวอย่าง** จงหาการตอบสนองเชิงความถี่ของระบบต่อไปนี้



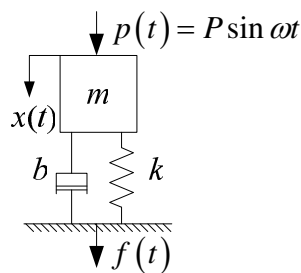
$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + bj\omega + k} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + (b\omega)j}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad \text{และ} \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

$$x(t) = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad \square$$

### 10.1.3. Vibration Isolation



พิจารณาระบบเดิมอีกครั้งหนึ่ง แต่ครั้งนี้ให้แรงที่กระทำต่อพื้น  $f(t)$  เป็นเอาต์พุตแทนที่จะเป็นการเคลื่อนที่ของมวล  $x(t)$  ดังเช่นในตัวอย่างที่แล้ว ซึ่งจะทำให้เราสามารถวิเคราะห์การส่งผ่านแรงของสปริงและแดมเปอร์ซึ่งทำหน้าที่เป็นระบบกันสะเทือน เมื่อมีแรงมากกระทำที่ความถี่ต่างๆ

จากสมการการเคลื่อนที่ของมวล  $m$  คือ

$$p(t) = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$P(s) = (ms^2 + bs + k)X(s) \tag{10.1}$$

ส่วนแรงที่มากกระทำที่พื้นจะมีค่าเท่ากับ

$$f(t) = b\dot{x} + kx$$

$$F(s) = (bs + k)X(s) \tag{10.2}$$

และเพื่อกำจัด  $X(s)$  เราจะเอาสมการ (10.2) มาหารด้วยสมการ (10.1) จะได้

$$G(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

จากรูปพอร์มของระบบอันดับสองที่มี characteristic equation เป็น  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  เราจะกำหนดตัวแปรใหม่เป็น

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \text{และ} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

จะได้

$$G(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ถ้ามีอินพุตเป็น sinusoidal  $p(t) = P \sin \omega t$  เราสามารถที่จะหา steady-state response ที่ความถี่ต่างๆ ได้โดยใช้ sinusoidal transfer function

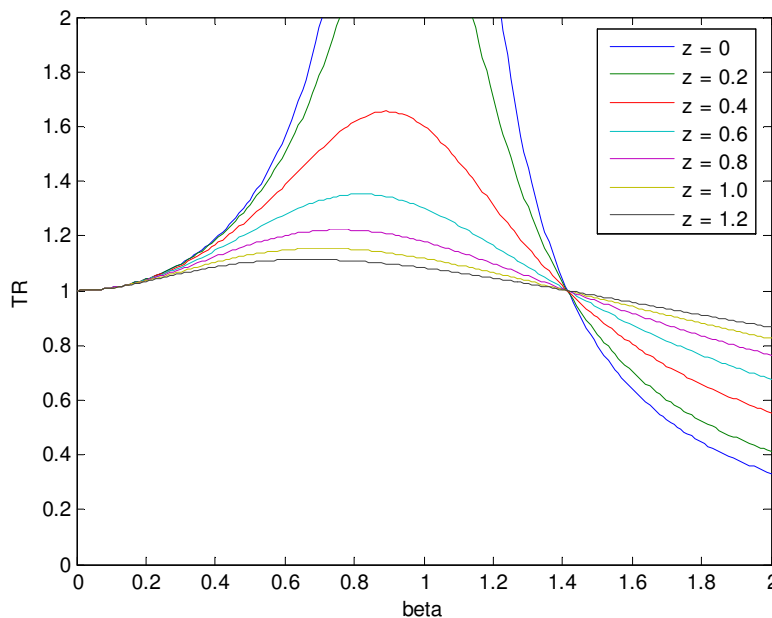
$$G(j\omega) = \frac{2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} + 1}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{2\zeta j\beta + 1}{-\beta + 2\zeta j\beta + 1} = \frac{1 + (2\zeta\beta)j}{(1-\beta) + (2\zeta\beta)j}$$

โดยที่  $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$\text{Transmissibility} = \text{TR} = \frac{\text{amp. of transmitted force}}{\text{amp. of excitatory force}} = \frac{|F(j\omega)|}{|P(j\omega)|}$$

แต่เนื่องจาก  $\frac{|F(j\omega)|}{|P(j\omega)|} = |G(j\omega)|$  ดังนั้น  $\text{TR} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$

เราสามารถเขียนกราฟของ TR ที่ความถี่ต่างๆ ได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟของ transmissibility (TR) ที่ความถี่ต่างๆ

กราฟในรูปที่ 1 นี้แสดงให้เห็นว่าระบบจะส่งผ่านแรงสั่นมากที่สุดเมื่อค่า  $\beta$  เข้าใกล้หนึ่ง นั่นคืออินพุตที่มีความถี่เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบ ถ้า damping ratio  $\zeta = 0$  (ระบบไม่มี damping) เมื่อมีแรงอินพุตที่มีความถี่ธรรมชาติของมัน ระบบจะมี TR เข้าสู่อินฟินิตี้ นั่นหมายความว่าแรงที่เกิดขึ้นจะมีแอมพลิจูดเป็นอนันต์ด้วย เมื่อ damping ratio เพิ่มขึ้น ค่าสูงสุดของ TR จะลดลงตามลำดับ และให้สังเกตว่าค่า  $\beta$  ที่ตำแหน่งสูงสุดนี้จะเลื่อนไปทางซ้ายเล็กน้อย

## 10.2. Bode Diagram

Bode Diagram เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการแสดง Frequency Response ของระบบโดยประกอบด้วยสองกราฟ คือ กราฟแสดงขนาด (magnitude) และเฟส (phase) ที่ความถี่ต่างๆ

กราฟ magnitude จะถูกพลอตในกราฟลอการิทึม (logarithm) โดยที่เราจะพลอตขนาดในแกน x เป็น  $20 \log |G(j\omega)|$  ซึ่งมีหน่วยเป็นเดซิเบล (decibel, dB) และพลอตความถี่ในแกน y เป็น  $\log \omega$  เราใช้กราฟ logarithm

เนื่องจากว่าฟังก์ชันลอการิทึมของการคูณจะเป็นการบวก ซึ่งทำให้ง่ายต่อการพลอต โดยที่เราสามารถพลอตขนาดของเทอมต่างๆ ใน transfer function แยกจากกัน แล้วนำกราฟของแต่ละเทอมมารวมกันภายหลัง

ส่วนกราฟ phase จะถูกพลอตในกราฟเซมิล็อก (semi-log) โดยเราจะพลอตเฟสในแกน x เป็น  $|G(j\omega)|$  และพลอตความถี่ในแกน y เป็น  $\log \omega$  เช่นเดียวกับกราฟ magnitude เนื่องจากเฟสของ transfer function หาได้จากมุมรวมของเทอมต่างๆ จึงสามารถทำให้เราสามารถพลอตเฟสของเทอมต่างๆ ใน transfer function แยกจากกันแล้วนำกราฟของแต่ละเทอมมารวมกันภายหลังได้ เช่นเดียวกับในกราฟ magnitude

ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการจะหา Bode diagram ของระบบที่มี transfer function เป็น

$$G(s) = \frac{3(s+1)}{s(s+2)}$$

ซึ่งมี sinusoidal transfer function เป็น

$$G(j\omega) = \frac{3(j\omega+1)}{(j\omega)(j\omega+2)}$$

ซึ่งเราจะสามารถหาขนาดได้เป็น

$$|G(j\omega)| = \frac{|3|(j\omega+1)|}{|(j\omega)|(j\omega+2)|}$$

ซึ่งเมื่อเราใส่ฟังก์ชันลอการิทึมจะทำให้ผลคูณของเทอมต่างๆ กลายเป็นผลบวกดังนี้

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log \frac{|3|(j\omega+1)|}{|(j\omega)|(j\omega+2)|} \\ &= 20 \log |3| + 20 \log |(j\omega+1)| + 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)} \right| + 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega+2)} \right| \\ &= 20 \log |3| + 20 \log |(j\omega+1)| - 20 \log |(j\omega)| - 20 \log |(j\omega+2)| \end{aligned}$$

ส่วนมุมก็ได้

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle \frac{3}{(j\omega)(j\omega+2)} \\ &= \angle 3 + \angle (j\omega+1) - \angle (j\omega) - \angle (j\omega+2) \end{aligned}$$

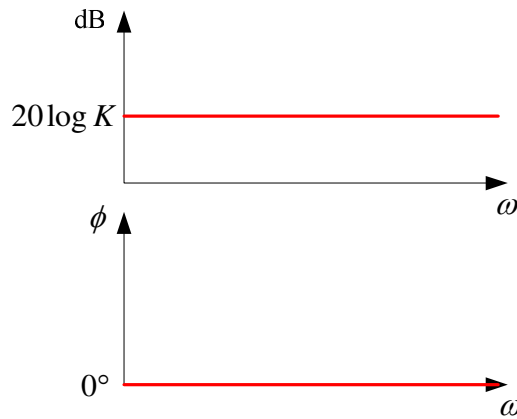
ดังนั้นต่อไป เราจะศึกษาวิธีการพลอต Bode diagram สำหรับแต่ละเทอม

### 10.2.1. Bode Diagram ของค่าคงที่

$$G(s) = K$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K \quad \text{และ} \quad \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

ดังนั้นเราจะกล่าวว่า Bode diagram สำหรับเทอมค่าคงที่ เป็นกราฟเส้นตรงที่มีขนาดคงที่เท่ากับ  $20 \log K$  และมีค่าเฟสเท่ากับ  $0^\circ$  ตลอดทุกความถี่ ดังกราฟในรูปที่ 2



รูปที่ 2 Bode Diagram ของค่าคงที่  $K$ ,  $G(s) = K$

### 10.2.2. Bode Diagram ของเทอม Integral และ Derivative

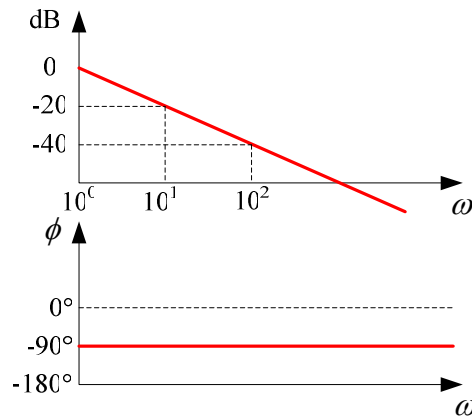
#### สำหรับเทอม Integral

$$G(s) = \frac{1}{s} \text{ ซึ่งมี } G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega \text{ และ } \angle G(j\omega) = \angle\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 0 - \angle j\omega = -90^\circ$$

สำหรับกรณีนี้ เมื่อ  $\omega$  เพิ่มขึ้นสิบเท่า ค่า  $20\log|G(j\omega)|$  จะเพิ่มขึ้น 20 dB เช่นเมื่อ  $\omega = 10^1$  rad/s จะมี  $20\log|G(j\omega)| = 20\log 10^1 = 20$  dB และเมื่อค่า  $\omega = 10^2$  rad/s จะมี  $20\log|G(j\omega)| = 20\log 10^2 = 40$  dB เราเรียกการเพิ่มขึ้นของ  $\omega$  สิบเท่านี้ว่า decade

ดังนั้นเราจะกล่าวว่า Bode diagram สำหรับเทอม  $1/s$  เป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -20 dB/decade และมีค่าเป็น 0 dB ที่  $\omega = 10^0 = 1$  rad/s ส่วนเฟสเท่ากับ  $-90^\circ$  ตลอดทุกความถี่ ดังกราฟในรูปที่ 3



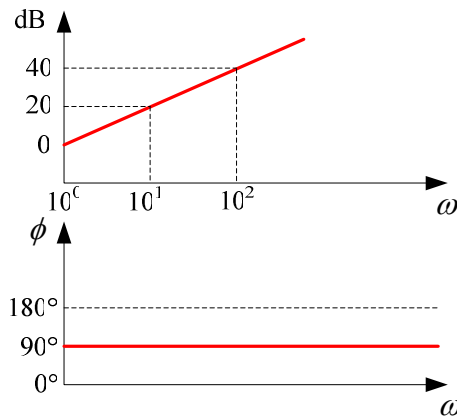
รูปที่ 3 Bode Diagram ของเทอม Integral,  $G(s) = \frac{1}{s}$

#### สำหรับเทอม Derivative

$$G(s) = s \text{ ซึ่งมี } G(j\omega) = j\omega$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log|j\omega| = 20\log\omega \text{ และ } \angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ$$

ดังนั้น Bode diagram สำหรับเทอม  $s$  จึงเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 20 dB/decade และมีค่าเป็น 0 dB ที่  $\omega = 10^0 = 1$  rad/s (เช่นเดียวกับเทอม  $1/s$ ) ส่วนเฟสเท่ากับ  $90^\circ$  ตลอดทุกความถี่ ดังกราฟในรูปที่ 4



รูปที่ 4 Bode Diagram ของเทอม Derivative,  $G(s) = s$

### 10.2.3. Bode Diagram ของระบบอันดับหนึ่ง

สำหรับระบบอันดับหนึ่งซึ่งมีค่า time constant เท่ากับ  $T$  และมีรูปแบบของ transfer function เป็น

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad \text{ซึ่งมี} \quad G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega+1}$$

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log|T\omega j+1| = -20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2}$$

โดยเราจะสามารถประมาณกราฟ magnitude  $20\log|G(j\omega)|$  โดยแยกพิจารณาเป็นสองช่วงคือ

สำหรับ  $\omega \ll 1/T$  (หรือ  $\omega T \ll 1$ )

$$-20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2} \approx -20\log\sqrt{1^2} = 0 \text{ dB}$$

สำหรับ  $\omega \gg 1/T$  (หรือ  $\omega T \gg 1$ )

$$-20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2} \approx -20\log\sqrt{T^2\omega^2} = -20\log|T\omega| \text{ dB}$$

ซึ่งค่า  $-20\log|T\omega|$  เป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ  $-20 \text{ dB/decade}$  โดยมีค่าเป็น  $0 \text{ dB}$  ที่ความถี่  $\omega = 1/T$

เราเรียกความถี่นี้เป็น corner frequency

ส่วนกราฟเฟสสามารถประมาณได้โดย

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{Tj\omega+1} = -\tan^{-1} \frac{T\omega}{1}$$

เช่นเดียวกันเราจะแบ่งช่วงการพิจารณาโดยแบ่งช่วงที่  $\omega = 1/T$

สำหรับ  $\omega \ll 1/T$

$$\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1} \frac{0}{1} = 0^\circ$$

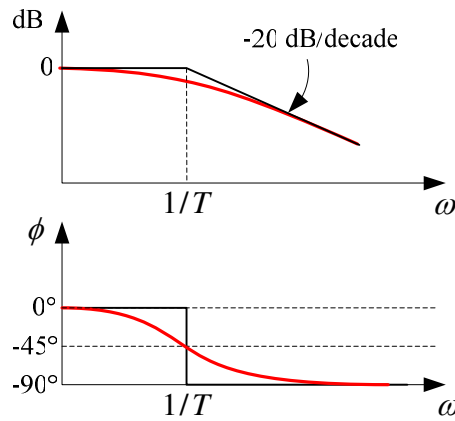
สำหรับ  $\omega = 1/T$

$$\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1} \frac{1}{1} = -45^\circ$$

สำหรับ  $\omega \gg 1/T$

$$\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1} \frac{\infty}{1} = -90^\circ$$

เราจะใช้การประมาณดังกล่าวเป็น asymptote ของ Bode diagram กราฟขนาดและกราฟเฟสสำหรับระบบอันดับหนึ่งซึ่งสามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 5



รูปที่ 5 Bode Diagram ของระบบอันดับหนึ่ง,  $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

ในลักษณะคล้ายกันถ้า Transfer function อยู่ในรูป

$$G(s) = Ts + 1 \text{ ซึ่งมี } G(j\omega) = Tj\omega + 1$$

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log|Tj\omega + 1| = -20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2}$$

โดยเราจะสามารถประมาณกราฟ magnitude  $20\log|G(j\omega)|$  โดยแยกพิจารณาเป็นสองช่วงคือ สำหรับ  $\omega \ll 1/T$  (หรือ  $\omega T \ll 1$ )

$$20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2} \approx 20\log\sqrt{1^2} = 0 \text{ dB}$$

สำหรับ  $\omega \gg 1/T$  (หรือ  $\omega T \gg 1$ )

$$20\log\sqrt{1^2 + T^2\omega^2} \approx 20\log\sqrt{T^2\omega^2} = 20\log|T\omega| \text{ dB}$$

จะเห็นว่ากราฟ magnitude จะคล้ายกับเดิมแต่จะมีความชันเป็น 20 dB/decade (มีความชันเป็นบวกแทนที่จะเป็นลบเช่นในกรณีที่แล้ว)

ส่วนกราฟเฟสสามารถประมาณได้โดย

$$\angle G(j\omega) = \angle Tj\omega + 1 = \tan^{-1} \frac{T\omega}{1}$$

เช่นเดียวกันเราจะแบ่งช่วงการพิจารณาโดยแบ่งช่วงที่  $\omega = 1/T$

สำหรับ  $\omega \ll 1/T$

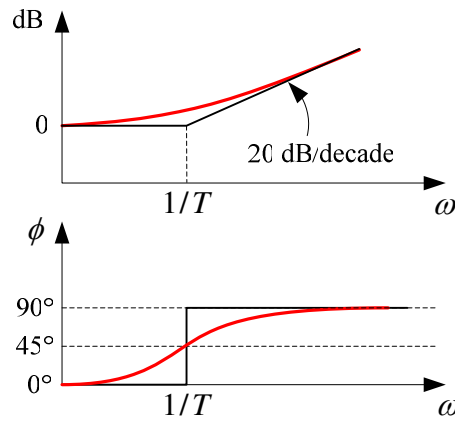
$$\angle G(j\omega) \approx \tan^{-1} \frac{0}{1} = 0^\circ$$

สำหรับ  $\omega = 1/T$

$$\angle G(j\omega) \approx \tan^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ$$

สำหรับ  $\omega \gg 1/T$

$$\angle G(j\omega) \approx \tan^{-1} \frac{\infty}{1} = 90^\circ$$



รูปที่ 6 Bode Diagram ของระบบ  $G(s) = Ts + 1$

### 10.2.4. Bode Diagram ของระบบอันดับสอง

พิจารณาระบบอันดับสองในรูปฟอร์ม

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

ซึ่งมี sinusoidal transfer function เป็น

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta(j\omega)}{\omega_n} + 1}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

สำหรับ  $\omega \ll \omega_n$   $20 \log |G(j\omega)| \approx -20 \log \sqrt{1^2} = 0 \text{ dB}$

สำหรับ  $\omega \gg \omega_n$   $20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$

ซึ่งแสดงว่ากราฟจะมีความชันเป็น -40 dB/decade และมีค่าเป็น 0 dB ที่  $\omega = \omega_n$

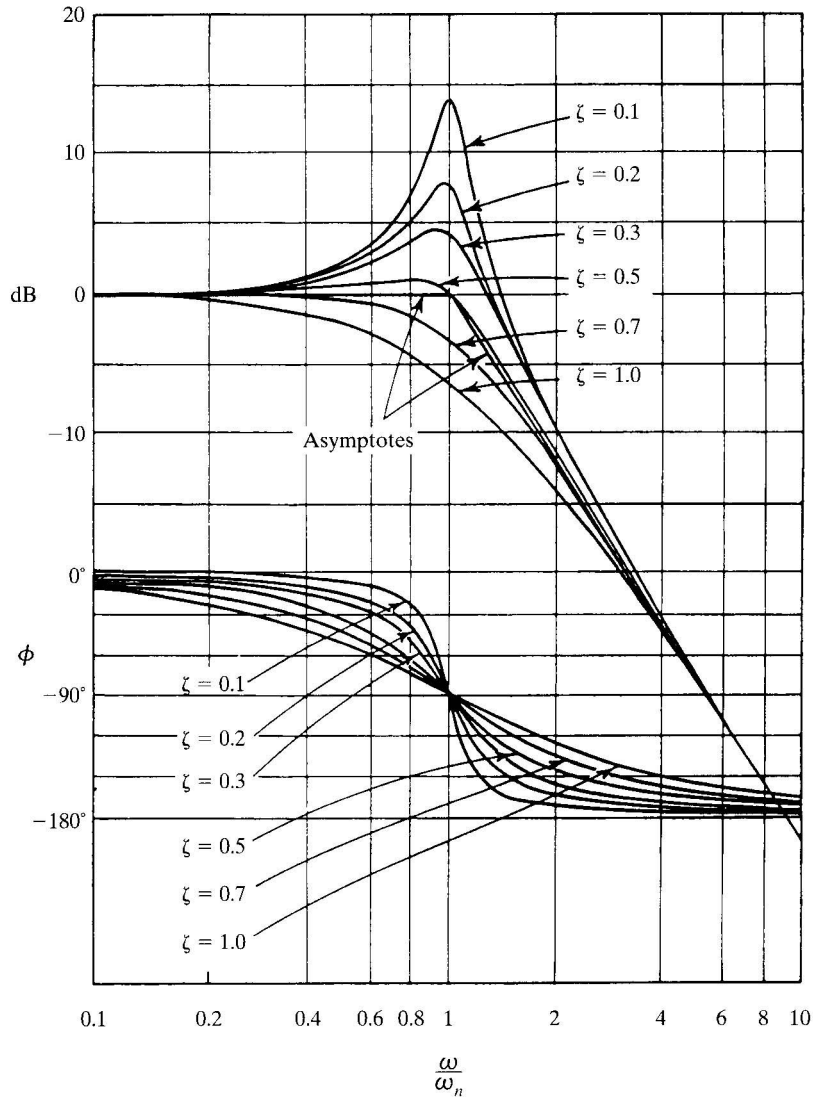
$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

สำหรับ  $\omega \ll \omega_n$   $\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1} \frac{0}{1} = 0^\circ$

สำหรับ  $\omega = \omega_n$   $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta}{0} = 90^\circ$

สำหรับ  $\omega \gg \omega_n$   $\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1} \frac{0}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -180^\circ$

กราฟขนาดและเฟสของระบบอันดับสองแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 7 Bode Diagram ของระบบอันดับสอง,  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

กราฟแสดงให้เห็นว่าที่ความถี่ใกล้กับความถี่ธรรมชาติระบบจะมีการตอบสนองที่มีแอมพลิจูดสูงสุดสำหรับระบบที่มี damping น้อย ซึ่งเราสามารถหาดำแหน่งที่มี แอมพลิจูดสูงสุดจะเกิดเมื่อ

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

มีค่าน้อยที่สุด เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{d}{d\omega} g(\omega) = 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \left(\frac{-2\omega}{\omega_n^2}\right) + 2 \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right) = 0$$

$$\cancel{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) (-\cancel{2} \cancel{\omega}) + 2(\cancel{2}\zeta \cancel{\omega}) (\cancel{2}\zeta) = 0$$

$$-1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta^2 = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

เราเรียกความถี่นี้เป็น resonance frequency  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$  ซึ่งจะมีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ  $0 \leq \zeta \leq 0.707$  ดังนั้นถ้า damping ratio  $\zeta > 0.707$  จะไม่มีจุดสูงสุด (peak) ในกราฟ magnitude ของ Bode diagram ขอให้สังเกตว่าสมการของ resonance frequency คล้ายกับ damped natural frequency ซึ่งมีค่าเป็น  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  ซึ่งข้อสังเกตนี้ช่วยให้จำง่ายแต่อย่าเอามาสับสนกัน

ค่าสูงสุดในกราฟ magnitude,  $M_r$ , สามารถหาได้จาก

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

**ตัวอย่าง** จงวาด Bode diagram ของระบบที่มี transfer function ต่อไปนี้

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

เราต้องจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปที่สามารถเขียน Bode diagram ได้เลยดังต่อไปนี้

$$G(s) = \frac{7.5\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$$

ซึ่งประกอบด้วยตัวประกอบต่างๆ ได้แก่  $7.5$ ,  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{s}{3}+1$ ,  $\frac{1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)}$ ,  $\frac{1}{\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$

ซึ่งตัวประกอบ  $\frac{s}{3}+1$  มี corner frequency ที่  $\omega = 3$

ตัวประกอบ  $\frac{1}{\frac{s}{2}+1}$  มี corner frequency ที่  $\omega = 2$

ตัวประกอบ  $\frac{1}{\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$  มี corner frequency ที่  $\omega = \sqrt{2}$

### 10.3. การพลอต Bode Diagram ด้วยโปรแกรม Matlab

เราสามารถใช้คำสั่ง

```
bode(sys, w)
```

ซึ่งคำสั่งนี้จะพลอต Bode diagram ของระบบที่แสดงโดยตัวแปร sys ในช่วงความถี่ที่กำหนดโดยตัวแปร w เราสามารถกำหนดช่วงความถี่ที่แบ่งช่วงความถี่ในกราฟ log ให้เท่ากันได้โดยใช้คำสั่ง

```
W = logspace(d1, d2, n)
```

ซึ่งจะแบ่งกราฟจาก d1 ถึง d2 เป็น n ช่วง

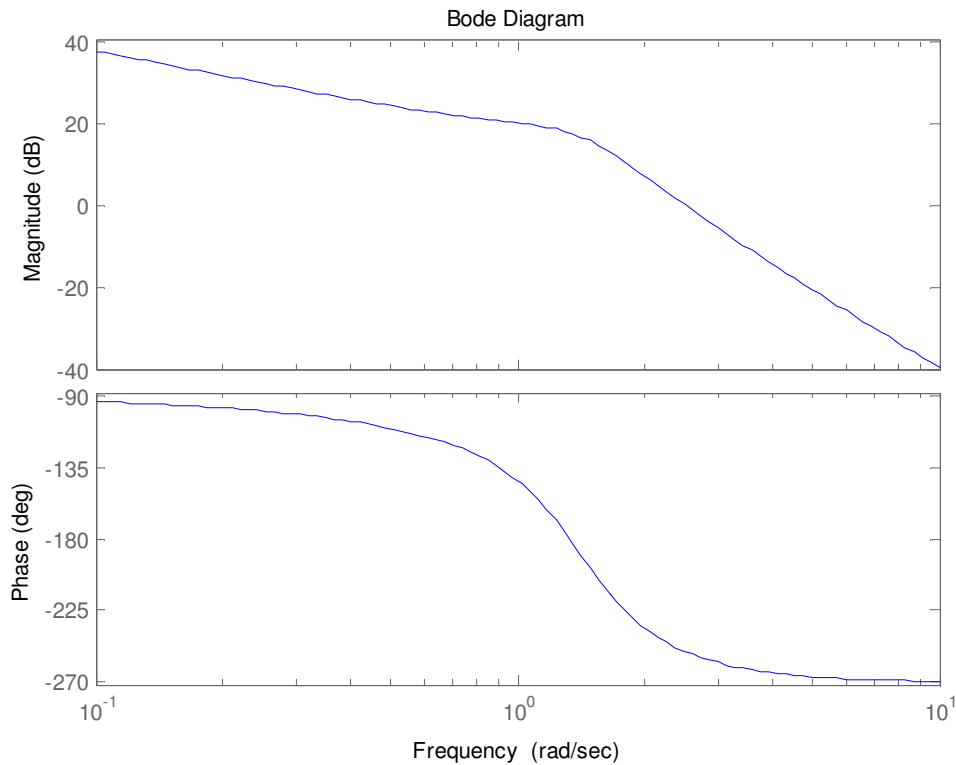
ตัวอย่างเช่น ในตัวอย่างที่ผ่านมา มี transfer function เป็น

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

เราสามารถเขียนคำสั่งใน Matlab เพื่อให้พลอต Bode diagram ของ transfer function ดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้

```
w = logspace(-1, 1, 100);
A=tf([10], [1 2 0]);
B=tf([1 3], [1 1 2]);
sys=A*B;
bode(sys, w);
```

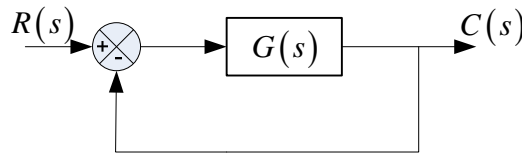
ซึ่งจะได้ผลการทำงานเป็นกราฟในรูปแบบที่ 8



รูปที่ 8 Bode Diagram ซึ่งได้จากโปรแกรม Matlab ของระบบ  $G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

### 10.4. การพิจารณาเสถียรภาพของระบบด้วย Bode Diagram

พิจารณาระบบควบคุมแบบปิด (closed-loop) ดังแสดงในรูปที่ 9 เราสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบควบคุมแบบปิด โดยการวิเคราะห์ Bode diagram ของ open-loop transfer function  $G(s)$  ดังต่อไปนี้



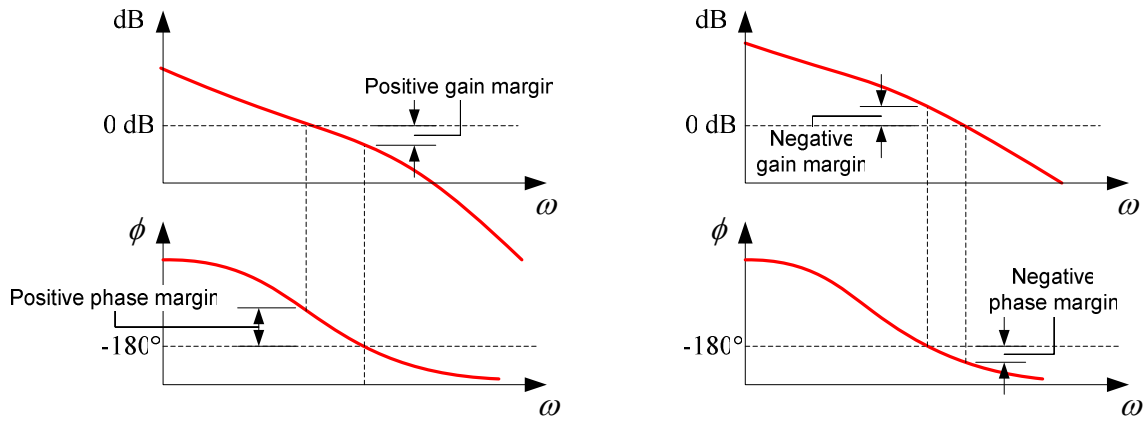
รูปที่ 9 Block Diagram ของระบบควบคุมปิด (closed loop)

ก่อนอื่นเราจะต้องรู้จักความหมายของศัพท์ต่อไปนี้

- Gain margin คือค่าลบของ magnitude  $|G(j\omega)|$  ที่ความถี่เมื่อมีเฟสเท่ากับ  $-180^\circ$
- Phase margin คือค่าเฟสเกินจาก  $-180^\circ$  ที่ความถี่ที่มีขนาดเป็น 0 dB

รูปที่ 10 แสดงภาพความหมายของ gain margin และ phase margin โดยจะเห็นว่าทั้ง gain margin และ phase margin จะมีเครื่องหมายตรงกัน กล่าวคือ ถ้าเป็นบวกก็จะเป็นบวกทั้งคู่ และถ้าเป็นลบก็จะเป็นลบทั้งคู่

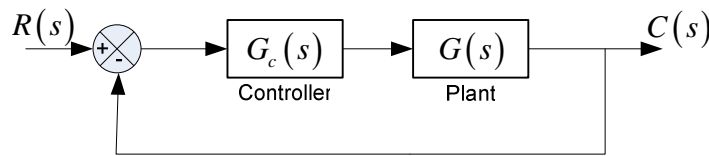
หลักการที่ใช้ในการพิจารณาเสถียรภาพคือ ระบบปิด (closed loop) จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อระบบเปิด (open loop) นั้นจะต้องมีค่า gain margin และ phase margin มีค่าเป็นบวก



รูปที่ 10 ความหมายของ gain margin และ phase margin

### 10.5. การออกแบบระบบควบคุมด้วย Bode Diagram

พิจารณาระบบควบคุมแบบปิดในรูปที่ 11 ซึ่งเราต้องการออกแบบ controller ซึ่งมี transfer function เป็น  $G_c(s)$



รูปที่ 11 Block Diagram ของระบบควบคุมแบบปิด

เราสามารถที่จะใช้ Bode diagram ในการออกแบบระบบควบคุมได้ เนื่องจาก Bode diagram สามารถแสดงคุณสมบัติต่างๆ ของระบบได้ดังต่อไปนี้

1. เราสามารถใช้ asymptote ที่ความถี่ต่ำเป็นตัวบอก type ของระบบและ static error constant  $K_p, K_v$  และ  $K_a$  โดยที่เราจะดูความชันเริ่มต้นหรือที่ความถี่ต่ำว่ามีค่าเป็นเท่าไร เนื่องจากสำหรับ transfer function

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

ซึ่งมี type N ดังนั้นจากตัวประกอบ  $1/s^N$  ทำให้สำหรับ type 0, 1 และ 2 จะมีความชันเริ่มต้นเป็น 0, -20 และ -40 dB/decade ตามลำดับ

2. คุณสมบัติ transient response เชิงความถี่ เช่น phase margin, gain margin, bandwidth สามารถอ่านได้ง่ายโดยใช้ Bode Diagram
3. เราสามารถออกแบบคอนโทรลเลอร์เพื่อให้ได้ค่า gain margin และ phase margin ตามต้องการได้โดยใช้ Bode diagram เนื่องจากเราสามารถมองเห็นได้ชัดว่าเราต้องการเฟสเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าไร เราจะใช้ lead, lag, หรือ lead-lag compensator สำหรับการออกแบบได้

- Lead compensator ซึ่งมีรูปสมการเป็น

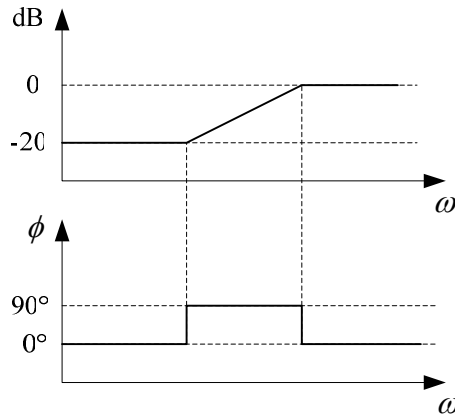
$$G_c = K \frac{s+a}{s+b} \text{ โดยที่ } a < b$$

Lead compensator มีลักษณะเป็น high-pass filter ดังแสดงในรูปที่ 12(a) ซึ่งมีประโยชน์ในการเพิ่มเสถียรภาพให้กับระบบ ทำให้ระบบมี bandwidth เพิ่มมากขึ้น ซึ่งทำให้ระบบตอบสนองได้รวดเร็วขึ้น อย่างไรก็ตามที่ระบบที่มีคุณสมบัติของ high-pass filter จะทำให้ระบบถูกรบกวนจาก noise ความถี่สูงได้

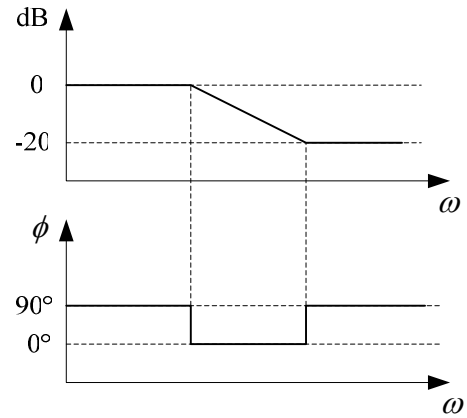
- Lag compensator ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$G_c = K \frac{s+a}{s+b} \text{ โดยที่ } a > b$$

Lag compensator มีลักษณะเป็น low-pass filter ดังแสดงในรูปที่ 12(b) ซึ่งจะลดเกนที่ความถี่สูงเท่านั้น ซึ่งจะทำให้ระบบมี bandwidth ลดลงและมีการตอบสนองช้าลง แต่เนื่องจากลดค่าเกนที่ความถี่สูง ดังนั้นเราจะสามารถเพิ่มค่าเกนรวมของระบบได้ ซึ่งทำให้ระบบมี steady-state error ลดลง



(a) Bode diagram ของ lead compensator



(b) Bode diagram ของ lag compensator

รูปที่ 12 Bode diagram ของ lead-lag compensator