บทที่ 9 เสถียรภาพของระบบควบคุมและ Root Locus

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. เข้าใจความหมายของเสถียรภาพ และความสัมพันธ์กับตำแหน่งของโพล
2. วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบโดยใช้วิธีการของ Route
3. วาด root locus ด้วยมือเพื่อวิเคราะห์ตำแหน่งโพลของระบบควบคุมเมื่อมีการเปลี่ยนค่า gain

9.1. การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ (Stability Analysis)

ก่อนที่จะกล่าวถึงการพิจารณาเสถียรภาพของระบบ เราจะได้ทบทวนเรื่องคำจำกัดความของโพลและซีโรก่อน โพลคือจำนวนเชิง s ที่ทำให้ส่วน (denominator) ของ transfer function (T.F.) มีค่าเป็นศูนย์ ถ้าเรานำส่วนของ T.F. มาให้เท่ากับศูนย์เราจะเรียกว่า characteristic equation ดังนั้นโพลก็คือรากของสมการ characteristic equation นั่นเอง

ซีโรคือจำนวนเชิง s ที่ทำให้เศษ (numerator) ของ T.F. มีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างเช่น ระบบที่มี T.F. เป็น

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s+1}{\left(s^2+2s+1\right)s} = \frac{2\left(s+1/2\right)}{\left(s+1\right)^2 s}$$

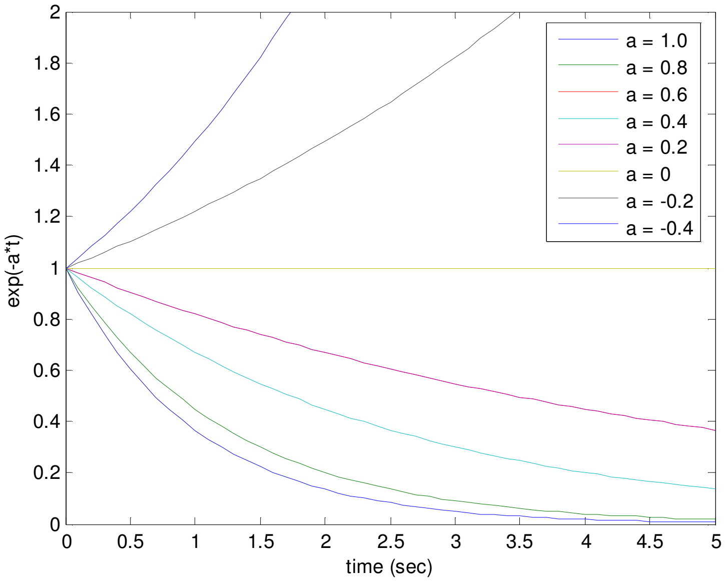
จาก T.F. ข้างต้น ระบบดังกล่าวมี characteristic equation คือ $(s+1)^2 s = 0$ ดังนั้นจึงมีโพล 3 ตัวที่ $s=0$ และโพลซ้ำสองตัวที่ $s=-1$ และมีซีโรหนึ่งตัวที่ $s=-1/2$

โพลของระบบจะเป็นตัวที่กำหนดลักษณะการตอบสนองของระบบโดยไม่ขึ้นกับอินพุท ทั้งนี้เนื่องจากการแปลงลาปลาสย้อนกลับของเทอม $1/(s+a)$ ซึ่งมีโพลเป็นจำนวนจริงที่ $s=-a$ จะได้ฟังก์ชัน exponential ดังนี้

$$\frac{1}{s+a} \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} e^{-at}$$

ดังนั้นถ้า $a>0$ ซึ่งทำให้ระบบมีโพลเป็นจำนวนจริงลบ จะทำให้การตอบสนองแบบ exponential มีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ที่มี time constant เท่ากับ $T=1/a$ ดังนั้นถ้าระบบมีค่า a มากขึ้น ซึ่งทำให้ตำแหน่งของโพลอยู่ห่างจากแกนจินตภาพ (imaginary axis) ไปทางซ้ายมากขึ้น ก็จะยิ่งทำให้ระบบมีการตอบสนองที่มีค่า time constant ลดลง หรือทำให้ระบบตอบสนองเร็วขึ้นนั่นเอง

ในทางกลับกันถ้า $a<0$ ทำให้ระบบมีโพลที่เป็นจำนวนจริงที่มีค่าบวก จะทำให้ระบบมีการการตอบสนองแบบ exponential ที่มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ซึ่งหมายความว่าระบบจะไม่มีเสถียรภาพนั่นเอง รูปที่ 1 แสดงกราฟการตอบสนองของระบบแบบ exponential ที่ค่า *a* ต่างๆ



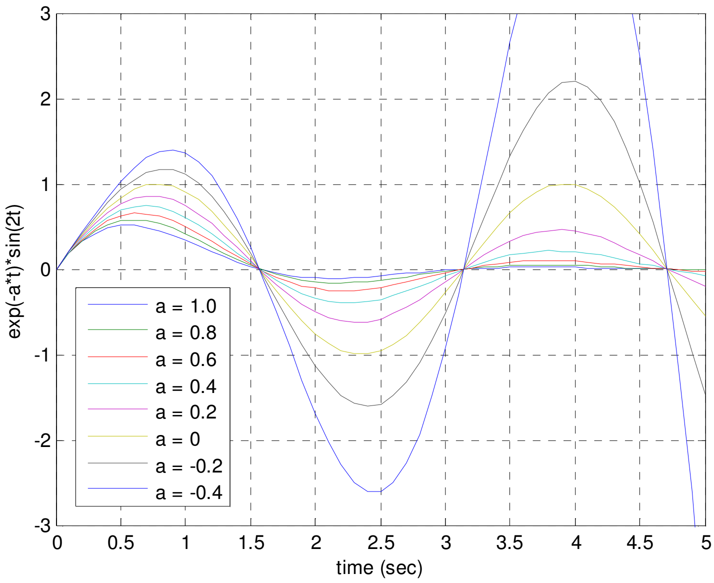
รูปที่ 1 กราฟแสดงการตอบสนองเมื่อโพลเป็นจำนวนจริงต่าง ๆ

ถ้าโพลเป็น complex conjugate แสดงว่าส่วนจะมีเทอม $(s+a)^2+\omega^2$ ซึ่งทำให้มีโพลที่ตำแหน่ง $s=-a\pm\omega j$ ซึ่งทำให้ระบบมีการตอบสนองเป็นการแกว่ง (oscillatory) อันเนื่องจากการแปลงลาปลาสย้อนกลับของเทอมดังกล่าวดังต่อไปนี้

$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} e^{-at}\sin\omega\mathrm{t}$$

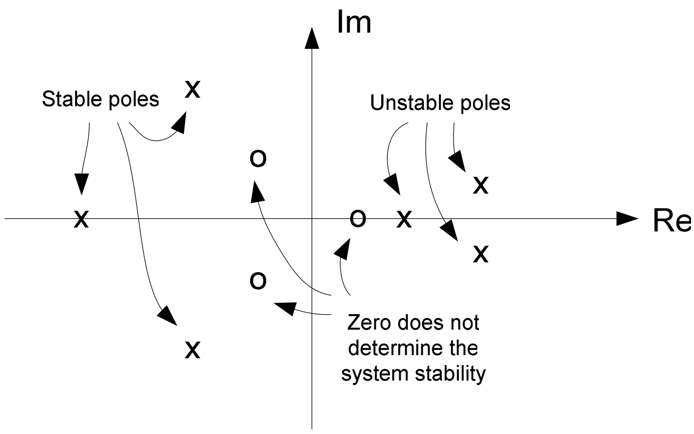
ถ้า $a>0$ ระบบจะมีโพลที่มีส่วนจริงมีค่าเป็นลบ ซึ่งระบบจะมีค่าแอมพลิจูดการแกว่งลดลงเข้าสู่ศูนย์แบบ exponential และถ้าระบบมีค่า a มากขึ้น ซึ่งทำให้ตำแหน่งของโพลอยู่ห่างจากแกนจินตภาพไปทางซ้ายมากขึ้น ก็จะยิ่งทำให้ระบบหยุดแกว่งเร็วขึ้น หรือทำให้ระบบมีค่าคงที่เร็วขึ้นนั่นเอง

ในทางกลับกันถ้า $a<0$ ระบบจะมีโพลที่มีส่วนจริงมีค่าเป็นบวก ซึ่งระบบจะมีค่าแอมพลิจูดการแกว่งเพิ่มขึ้นแบบ exponential อย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ดังนั้นจึงเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ รูปที่ 1 แสดงกราฟการตอบสนองของระบบแบบ exponential ที่ค่า *a* ต่างๆ



รูปที่ 2 กราฟแสดงการตอบสนองเมื่อโพลเป็น complex conjugate **ที่มีส่วนจริงเป็นค่าต่าง ๆ**

ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปได้ว่าโพลจะต้องมีส่วนจริงที่มีค่าเป็นลบ ระบบจึงจะมีการตอบสนองอยู่ในขอบเขตจำกัด หรือเรียกว่าเป็นระบบที่มีเสถียรภาพ ถ้าระบบมีโพลแม้แต่ตัวเดียวที่มีส่วนจริงมีค่าเป็นบวก เทอมนั้นจะทำให้ทั้งระบบไม่มีเสถียรภาพ เราสามารถพูดได้ว่า *โพลทุกตัวจะต้องอยู่ด้านซ้ายของ complex plane เพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพ*



9.2. Routh's Stability Criterion

การหาค่าโพลโดยตรงสามารถทำได้โดยการหารากของ characteristic equation ซึ่งเป็นสมการโพลีโนเมียล สำหรับระบบอันดับหนึ่ง หรืออันดับสอง การหารากของสมการเส้นตรงและสมการ quadratic สามารถทำได้ง่าย แต่สำหรับระบบอันดับสามขึ้นไปอาจทำได้ยากถ้าไม่มีคอมพิวเตอร์ช่วย ดังนั้นจึงมีวิธีการทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการพิจารณาว่ารากของสมการโพลีโนเมียลจะมีค่าส่วนจริงเป็นบวกบ้างหรือไม่ ถ้ารากทั้งหมดไม่มีส่วนจริงเป็นบวกเลย แสดงว่าระบบนั้นมีเสถียรภาพ แต่ถ้ามีแม้แต่รากเดียวที่มีส่วนจริงเป็นบวก ระบบจะไม่มีเสถียรภาพทันที

พิจารณาระบบ closed loop ที่มี T.F. อยู่ในรูปฟอร์ม

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

เราจะสามารถหาโพลของระบบได้โดยการหารากของ characteristic equation

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Routh's Criterion ใช้สำหรับการพิจารณาจำนวนรากที่มีส่วนจริงเป็นบวกของสมการโพลีโนเมียลนี้ โดย Routh's Criterion มีหลักการดังต่อไปนี้

1. สัมประสิทธิ์ของทุกเทอม a_i จะต้องมีค่าเป็นบวกทั้งหมด (หรือลบทั้งหมด) เพื่อให้รากทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นลบ
2. ถ้าสัมประสิทธิ์ของทุกเทอมมีค่าเป็นบวก ให้คำนวณด้วยวิธีการต่อไปนี้

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_o & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & & & & & \\
s^1 & & & & & \\
s^0 & & & & &
\end{array}$$

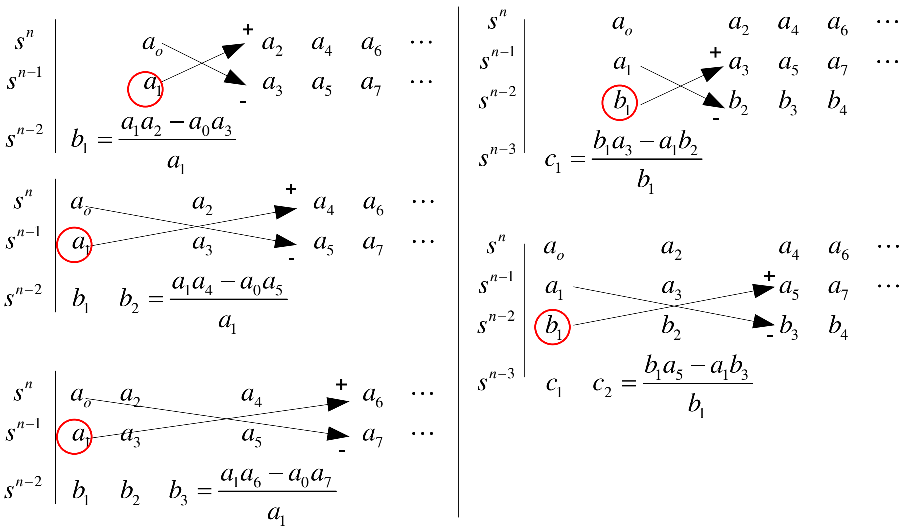
โดยที่

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1},\ b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},\ b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},\ c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1},\ c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \ldots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1},\ d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

สูตรเหล่านี้จำได้ง่าย โดยการจำรูปแบบของการคำนวณดังแสดงด้วยภาพต่อไปนี้



3. ถ้าสัมประสิทธิ์ในตารางช่องใดไม่มี ให้แทนที่ช่องนั้นด้วยศูนย์สำหรับการคำนวณ
4. จำนวนของรากของ characteristic equation ที่มีส่วนจริงเป็นบวกจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนการเปลี่ยนเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ที่คอลัมน์แรกของตาราง

ตัวอย่าง $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

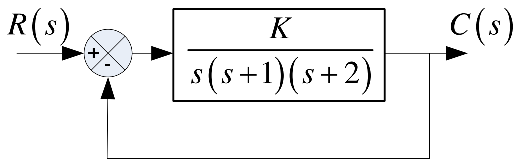
กรณีพิเศษ ถ้าคอลัมน์แรกของตารางมีค่าศูนย์ ให้แทนค่าศูนย์นั้นด้วยค่าบวกเล็กๆ ที่แทนด้วยตัวแปร ε

ตัวอย่าง $s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s+2)(s^2+1) = 0$

ในกรณีนี้ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย แต่การที่มีค่าศูนย์ในแถวแรก หมายความว่าระบบเป็นกึ่งเสถียร คือมีโพลอยู่บนแกนจินตภาพพอดี ระบบเช่นนี้จะเกิดการแกว่งไม่มีที่สิ้นสุด

ตัวอย่าง $s^3 - 3s^2 + 2 = (s-1)^2 (s+2) = 0$

ตัวอย่าง จงหาช่วงของค่า K ที่จะทำให้ระบบ closed loop ที่แสดงโดย block diagram ต่อไปนี้มีเสถียรภาพ



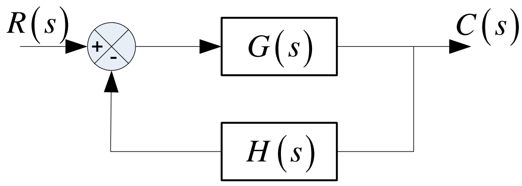
$$0 < K < 6$$ □

9.3. Root-Locus Analysis

Root locus คือเส้นทางของรากของ characteristic equation หรือตำแหน่งโพลของระบบ closed loop เมื่อเราเปลี่ยนค่าเกนจากศูนย์ถึงอนันต์ เมื่อเราทราบตำแหน่งของโพลเราก็สามารถที่จะทราบลักษณะการตอบสนองของระบบที่ค่าเกนต่างๆ ดังนั้นเราจึงสามารถที่จะเลือกค่าเกนตามลักษณะการตอบสนองที่เราต้องการได้ นอกจากนี้เรายังใช้ root locus ในการเลือกชนิดของ controller และการวางตำแหน่งของโพลและซีโรของ controller ให้เหมาะสม เพื่อให้ได้ระบบ closed loop ที่มีพฤติกรรมตามต้องการได้อีกด้วย

9.3.1. Angle และ Magnitude Conditions

พิจารณา block diagram ดังรูปต่อไปนี้



ซึ่งมี closed-loop T.F. คือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

characteristic equation ของสมการดังกล่าวคือ $1+G(s)H(s)=0$

หรือ

$$G(s)H(s) = -1 \tag{9.1}$$

ดังนั้นโพลของระบบ closed loop จะต้องทำให้สมการ (9.1) เป็นจริง ซึ่งเราสามารถแยกเขียนในรูปของมุมและขนาดได้ดังต่อไปนี้

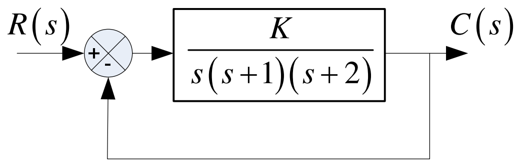
มุมของสมการ (9.1) เรียกว่า angle condition

$$\boxed{\angle GH = \pm 180^\circ(2k+1),\ k = 0,1,2,\ldots}$$

ขนาดของสมการ (9.1) เรียกว่า magnitude condition

$$\boxed{|GH| = 1}$$

9.3.2. **ตัวอย่างวิธีการวาด** Root Locus



ในที่นี้เราจะพิจารณาระบบเดิมอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งเราได้พิจารณาโดยการใช้ Routh's criterion แล้วว่าค่าเกนจะต้องอยู่ในช่วง $0<K<6$ จึงจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพ นั่นคือมีโพลของระบบ closed-loop ทั้งหมดอยู่ทางด้านซ้านของแกนจินตภาพ ในที่นี้เราจะแสดงวิธีการวาด root locus สำหรับระบบนี้ เมื่อมีการเปลี่ยนค่าเกน K จาก $0 \to \infty$ ตัวอย่างนี้จะทำให้เข้าใจการใช้ angle และ magnitude conditions ในการวาด root locus ก่อน ในส่วนต่อไปจึงจะกล่าวสรุปวิธีการวาด root locus โดยทั่วไปอีกครั้ง

ระบบนี้มี open-loop T.F. คือ

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad \text{(ในที่นี้ } H(s)=1\text{)}$$

characteristic equation ของระบบ closed loop คือ $1+G(s)=0$

$$1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=0 \text{ หรือ } s(s+1)(s+2)+K=0 \tag{9.2}$$

เมื่อเกน $K=0$ ระบบ closed loop จะมีโพลที่ $s=0$, $s=-1$ และ $s=-2$ นั่นคือที่เดียวกับตำแหน่งโพลของระบบ open loop นั่นเอง ดังนั้นจึงให้จำไว้ว่า *เมื่อเกน K มีค่าเป็นศูนย์ โพลของระบบ closed loop จะอยู่ตำแหน่งเดียวกับโพลของระบบ open loop* ซึ่งทำให้ root locus เริ่มต้นที่ตำแหน่งของโพลของระบบ open loop เสมอ

ซึ่งมี angle condition คือ

$$\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=\pm 180^\circ(2k+1),\ k=0,1,2,\ldots \tag{9.3}$$

และ magnitude condition คือ

$$|G(s)|=\frac{K}{|s||s+1||s+2|}=1 \tag{9.4}$$

<u>หมายเหตุ</u>

ถ้า a,b,c,d เป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน $z=\frac{ab}{cd}$ สามารถเขียนในรูปของขนาดและมุมได้ดังต่อไปนี้

$$z=\frac{ab}{cd}=\frac{\left(|a|e^{j\angle a}\right)\left(|b|e^{j\angle b}\right)}{\left(|c|e^{j\angle c}\right)\left(|d|e^{j\angle d}\right)}=\frac{|a||b|}{|c||d|}e^{j(\angle a+\angle b-\angle c-\angle d)}$$

ดังนั้นมุมของจำนวนเชิงซ้อน $z=\frac{ab}{cd}$ เท่ากับ $\angle z=\angle a+\angle b-\angle c-\angle d$

และขนาดของจำนวนเชิงซ้อน $z=\frac{ab}{cd}$ เท่ากับ $|z|=\frac{|a||b|}{|c||d|}$

<u>วิธีทำ</u>

ถ้าตำแหน่งใดๆ ที่ทำให้สมการ angle condition ดังสมการ (9.3) เป็นจริง เราสามารถสรุปว่าตำแหน่งนั้นอยู่บน root locus โดยไม่ต้องพิจารณา magnitude condition และเมื่อทราบว่าตำแหน่งนั้นอยู่บน root locus แล้วจึงสามารถใช้ magnitude condition ในการหาค่าเกน K ได้

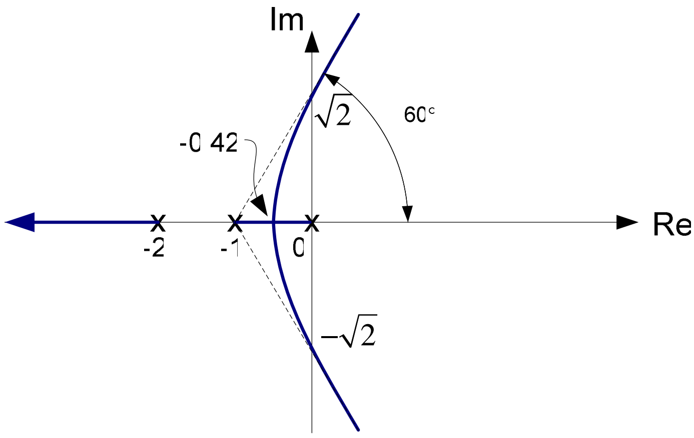
1. <u>พิจารณา root locus บนแกนจริง (real axis)</u>

สำหรับ $s>0$, ที่ตำแหน่งนี้ $\angle s=\angle s+1=\angle s+2=0$ ดังนั้น $\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=0$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ angle condition ดังนั้นช่วงนี้จึงไม่อยู่บน root locus

สำหรับ $-1<s<0$, ที่ตำแหน่งนี้ $\angle s=180^\circ$ และ $\angle s+1=\angle s+2=0$ ดังนั้น $\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=-180^\circ$ ซึ่งสอดคล้องกับ angle condition ดังนั้นช่วงนี้จึงอยู่บน root locus

สำหรับ $-2<s<-1$, ที่ตำแหน่งนี้ $\angle s=\angle s+1=180^\circ$ และ $\angle s+2=0$ ดังนั้น $\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=-360^\circ$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ angle condition ดังนั้นช่วงนี้จึงไม่อยู่บน root locus

สำหรับ $s<-2$, ที่ตำแหน่งนี้ $\angle s=\angle s+1=\angle s+2=180^\circ$ ดังนั้น $\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=-540^\circ=-180\times 3$ ซึ่งสอดคล้องกับ angle condition ดังนั้นช่วงนี้จึงอยู่บน root locus



2. <u>พิจารณา asymptote ของ root locus</u>

Asymptote คือแนวของเส้น root locus เมื่อเพิ่มค่าเกน $K\to\infty$ ซึ่งหาได้โดยการประมาณว่า $\angle s\approx\angle s+1\approx\angle s+2=\phi$ ดังนั้นจาก angle condition เราจะได้ว่า

$$\angle G(s)=-\angle s-\angle s+1-\angle s+2=\pm 180^\circ(2k+1),\ k=0,1,2,\ldots$$

$$\approx 3\phi=\pm 180^\circ(2k+1)$$

$$\phi=\pm 60^\circ(2k+1)=60^\circ,180^\circ,300^\circ$$

นอกจากนี้เรายัง

นอกจากนี้เรายังต้องการหาตำแหน่งที่แนว asymptote ตัดกับแกนจริง จาก characteristic equation (9.2)

$$s(s+1)(s+2)+K=s^3+3s^2+\cdots=0$$

เมื่อ s มีค่ามากเราจะประมาณสมการนี้ได้เป็น

$$(s+1)^3=0$$

หรือ $s=-1$ หรือ $\sigma_a=-1$ ซึ่งเป็นจุดบนแกนจริงที่ asymptote ทั้งสามตัดกัน

3. <u>พิจารณาจุด breakaway</u>

เราสามารถเขียนสมการ characteristic equation ในรูป

$$1+G(s)=0 \text{ โดยที่ } G(s)=K\frac{A(s)}{B(s)}$$

ดังนั้นจะได้

$$f(s)=B(s)+KA(s)=0 \tag{9.5}$$

โดยทั่วไปสมการ $f(s)=0$ จะมีรากซ้ำก็ต่อเมื่อมีตำแหน่งที่

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0$$

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

แทนค่า K ลงในสมการที่ (9.5) จะได้

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)}A(s) = 0$$

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \qquad (9.6)$$

หรือเราอาจจะสร้างสมการ (9.6) จากการหา derivative ของ $K = -B(s)/A(s)$ ซึ่งได้จากสมการ (9.5)

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{B(s)}{A(s)}\right) = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

สำหรับในที่นี้

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

เราจะได้ $K = -s^3 - 3s^2 - 2s$

$$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 6s - 2 = 0$$

เราจะได้รากของสมการดังกล่าวเป็น $s = -0.42, \cancel{-1.58}$

ซึ่งสอดคล้องกับเกน (ซึ่งหาได้จาก magnitude condition) $K = 0.38, -0.38$ ตามลำดับ

เนื่องจาก $s = -1.58$ ไม่อยู่บน root locus ดังนั้นจุด breakaway point จึงอยู่ที่ตำแหน่ง $s = -0.42$

4. <u>พิจารณาตำแหน่งที่ root locus ตัดกับแกนจินตภาพ</u>

จาก characteristic equation ในสมการ (9.2) จะได้

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

เราแทนค่า $s = j\omega$

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

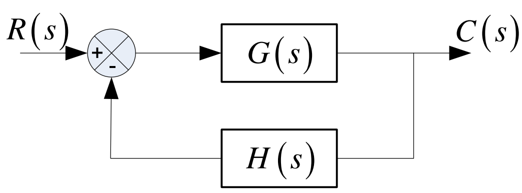
$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega j + K = 0$$

$$\left(K - 3\omega^2\right) + \left(2\omega - \omega^3\right) j = 0$$

โดยการแก้สมการส่วนจินตภาพเราจะได้ $\omega = \pm\sqrt{2} \Rightarrow K = 6$ □

9.3.3. วิธีการวาด root locus โดยทั่วไป

สำหรับระบบที่แสดงโดย block diagram ต่อไปนี้



ซึ่งมี characteristic equation คือ $1 + GH = 0$

หรือ

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

1. <u>วางตำแหน่งของโพลและซีโร่ของระบบ open loop *G(s)H(s)* บน complex plane</u>

เส้นทางเดินของ root locus จะเริ่มต้นที่ โพลของระบบ open loop และวิ่งไปสู่ซีโร่ของระบบ open loop หรือวิ่งไปสู่อนันต์

2. <u>หา root locus บนแกนจริง</u>

เราไม่ต้องพิจารณาโพลและซีโร่ที่เป็น complex conjugate (ไม่ได้อยู่บนแกนจริง) ถ้าจำนวนรวมของโพลและซีโร่ทางด้านขวาของจุดทดสอบเป็นเลขคี่ จุดนั้นวางอยู่บน root locus

3. <u>หาเส้น asymptote ของ root locus</u>

มุมของเส้น asymptotes = $\pm\dfrac{180°(2k+1)}{n-m}$

จุดตัดแกนจริงของเส้น asymptote, $\sigma_a = -\dfrac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$

4. <u>หาจุด breakaway และจุด break-in</u>

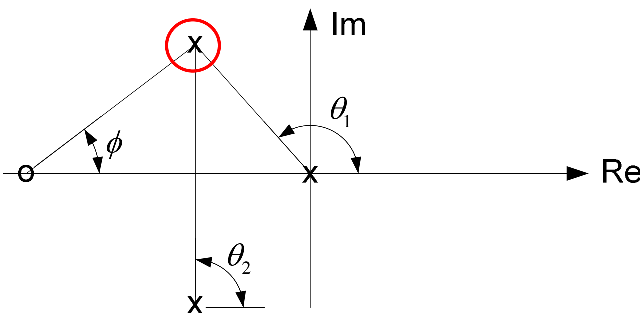
หาจำนวนจริง s และเกน K ที่ทำให้ $\dfrac{dK}{ds}=0$

5. <u>หา angle of departure และ angle of arrival</u>

$$\text{Angle of departure} = 180 - \sum \text{angle from other poles} + \sum \text{angle from other zeros}$$

$$\text{Angle of arrival} = 180 - \sum \text{angle from other zeros} + \sum \text{angle from other poles}$$

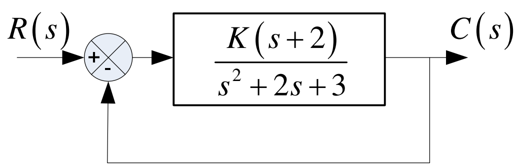
ตัวอย่างเช่น ในรูปข้างล่างนี้โพลที่มีวงกลมล้อม จะมี angle of departure $= 180° - (\theta_1 + \theta_2) + \phi$



6. <u>หาจุดที่ root locus อาจตัดกับแกนจินตภาพ</u>

โดยการให้ $s = j\omega$ แล้วแก้สมการหา K และ ω

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงวาด root locus ของระบบที่แสดงโดย block diagram ต่อไปนี้ เมื่อค่าเกน K แปรจาก $0 \to \infty$



9.4. การวาด Root Locus ด้วยโปรแกรม Matlab

ในที่นี้เราจะเรียนรูปการวาดรูป root locus ด้วยโปรแกรม Matlab ซึ่งสามารถได้เส้น root locus ที่แม่นยำและรวดเร็วกว่าการคำนวณด้วยมือมาก

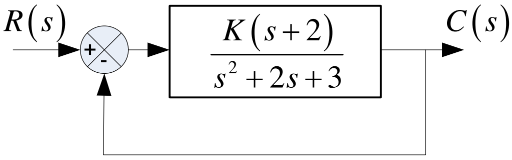
โปรแกรม Matlab จะใช้รูปแบบของ characteristic equation เป็น

$$1 + K\frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

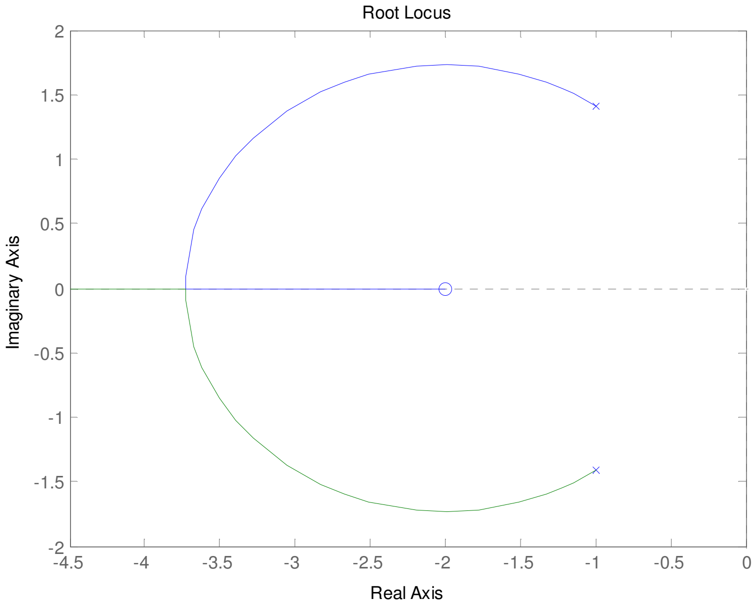
โดยที่ num เป็น polynomial ของเศษ และ den เป็น polynomial ของส่วน เราสามารถใช้คำสั่ง

```
rlocus(num,den)
```

เช่นในตัวอย่างที่ผ่านมาเราสามารถที่จะเขียนโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้



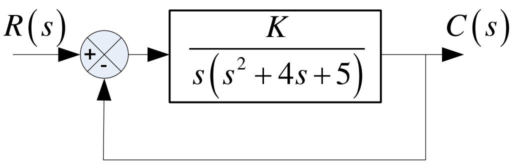

```
num = [1 2];
den = [1 2 3];
rlocus(num,den);
```



9.5. การออกแบบระบบควบคุมด้วย Root Locus

เราสามารถใช้ root locus ในการช่วยออกแบบระบบควบคุม ให้มีตำแหน่งของโพลระบบควบคุมของระบบ closed loop ตามที่เราต้องการได้ โดยอาจทำได้โดยการเลือกค่าเกนหรือการวางตำแหน่งของโพลและซีโรตามตำแหน่งต่างๆ ให้เหมาะสม เราจะใช้ตัวอย่างต่อไปนี้ในการแสดงให้เห็นวิธีการใช้ root locus ในการออกแบบระบบควบคุม

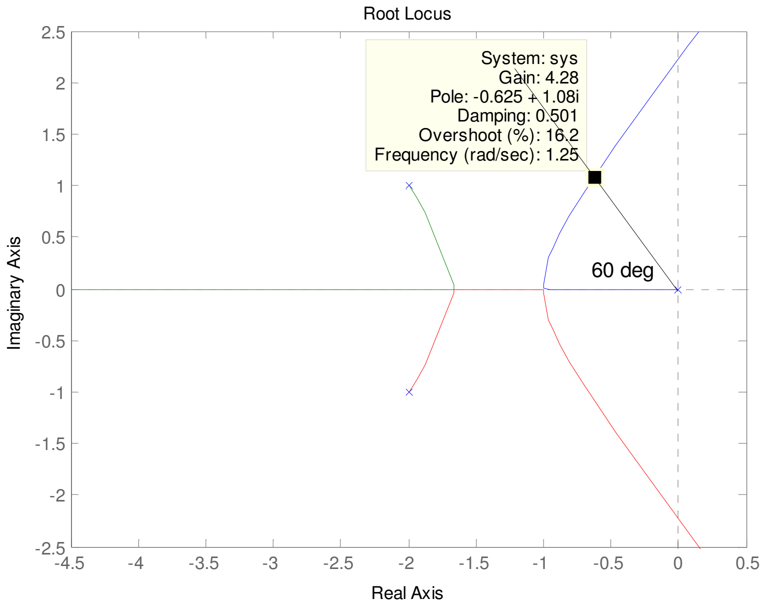
ตัวอย่าง จงออกแบบระบบควบคุมดังรูปต่อไปนี้ให้มีค่า damping ratio ของ dominant poles $\zeta = 0.5$



ในกรณีนี้เป็นการเลือกค่าเกน K เท่านั้น ไม่จำเป็นต้องมีการเลือกตำแหน่งการวางโพลและซีโรเพิ่มเติม โดยค่าเกน K จะต้องสอดคล้องกับ characteristic equation ซึ่งในที่นี้คือ

$$1 + \frac{K}{s(s^2+4s+5)} = 0$$

```
num = [1];
den =[1 4 5 0];
rlocus(num,den);
```



ซึ่งจากกราฟที่ได้จากโปรแกรม Matlab เราสามารถเลื่อน cursor ดูตามกราฟ ซึ่งจะเห็นว่าที่ค่าเกน K ประมาณ 4.26 จะทำให้ได้ damping ration เท่ากับ 0.5

ถ้าไม่ใช้โปรแกรม Matlab เราสามารถคำนวณด้วยมือได้ เนื่องจาก $\zeta = \cos 60^\circ = 0.5$ ดังนั้น ตำแหน่งโพลของระบบ closed loop จะอยู่บนเส้นที่ทำมุม $\pm 60^\circ$ กับแกนจริงลบ ซึ่งเราเขียนตำแหน่งของโพลนี้ได้เป็น

$$s = a\left(\cos 60 \pm j\sin 60\right) = a\left(1/2 \pm j\sqrt{3}/2\right) = b\left(1 \pm j\sqrt{3}\right)$$

โดยที่ b เป็นตัวแปรที่ต้องการหา เนื่องจากระบบนี้มี characteristic equation คือ

$$1 + \frac{K}{s\left(s^2 + 4s + 5\right)} = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

แทนค่า $s = b\left(1 + j\sqrt{3}\right)$ จะได้

$$b^3\left(1 + j\sqrt{3}\right)^3 + 4b^2\left(1 + j\sqrt{3}\right)^2 + 5b\left(1 + j\sqrt{3}\right) + K = 0$$

$$b^3\left(1 + 3(1)\left(j\sqrt{3}\right)^2 + 3(1)^2\left(j\sqrt{3}\right) + \left(j\sqrt{3}\right)^3\right) + 4b^2\left(1 + 2(1)\left(j\sqrt{3}\right) + \left(j\sqrt{3}\right)^2\right) + 5b\left(1 + j\sqrt{3}\right) + K = 0$$

$$b^3\left(1 - 9 + 3\sqrt{3}j - j3\sqrt{3}\right) + 4b^2\left(1 + 2\sqrt{3}j - 3\right) + 5b\left(1 + j\sqrt{3}\right) + K = 0$$

$$\left(-8b^3 - 8b^2 - 5b + K\right) + j\left(8\sqrt{3}b^2 + 5\sqrt{3}b\right) = 0$$

เทียบจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพเท่ากับศูนย์ได้

$$\left(-8b^3 - 8b^2 - 5b + K\right) = 0$$

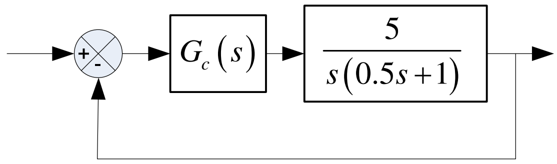
$$8\sqrt{3}b^2 + 5\sqrt{3}b = 0$$

จะได้

$$b = -5/8 = -0.625$$

ซึ่งจะได้ $$K = 8b^3 + 8b^2 + 5b = 8(-0.625)^3 + 8(-0.625)^2 + 5(-0.625) = 4.297$$ □

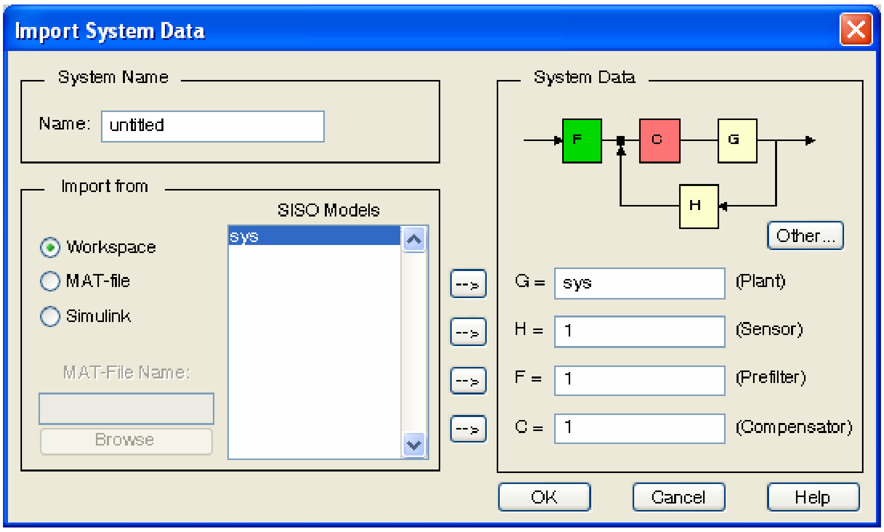
<u>ตัวอย่าง</u> จงออกแบบระบบควบคุมสำหรับระบบที่แสดงด้วย block diagram ต่อไปนี้ เพื่อให้ระบบมีตำแหน่งของ dominant closed loop poles ที่ $s=-2\pm j2\sqrt{3}$



ในโปรแกรม Matlab จะมีเครื่องมือสำหรับช่วยในการออกแบบระบบควบคุม ที่ช่วยให้การออกแบบทำได้ง่ายขึ้น โดยเรียกคำสั่ง sisotool โดยเราจะกำหนด plant ใน Matlab ชื่อ sys โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

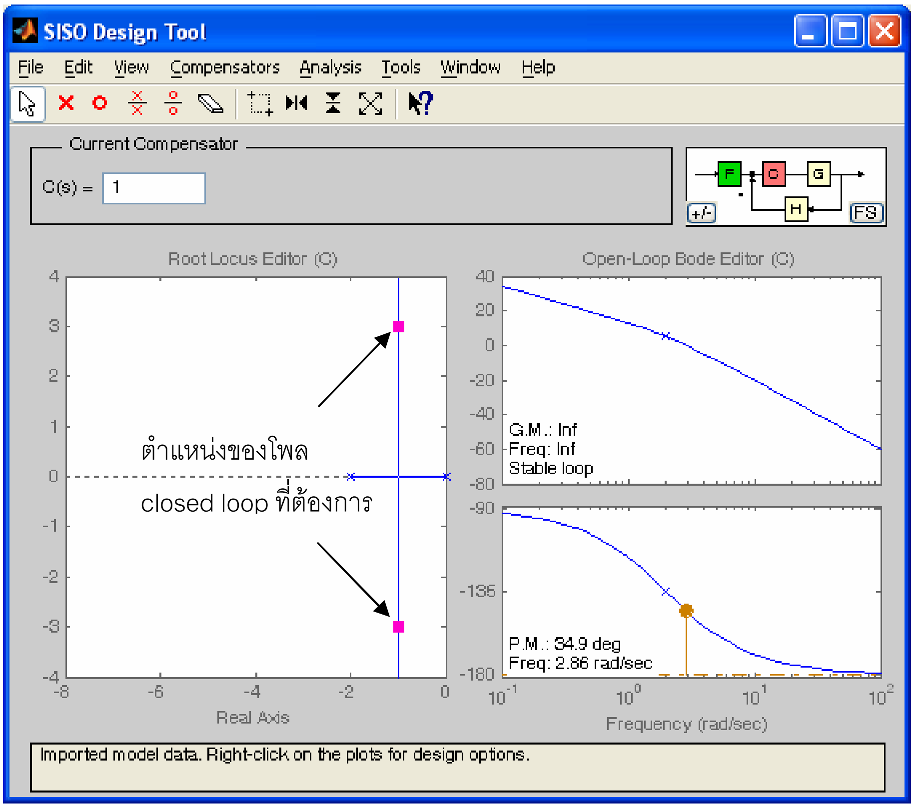
```
num=[5];
den=[0.5 1 0];
sys=tf(num,den);
```

จากนั้นเราจะกำหนด plant ให้กับ sisotool โดยเลือก File->Import… จะเปิดหน้าต่าง Import System Data ให้กำหนด Plant ของระบบเป็น sys ดังแสดงในภาพ



เมื่อกำหนด plant ของระบบแล้ว โปรแกรมจะแสดง root locus ของระบบควบคุมดังแสดงในรูปต่อไปนี้ ซึ่งเป็น root locus เมื่อระบบควบคุมเป็น proportional controller ซึ่งมี transfer function เป็น

$$G_c(s)=K$$

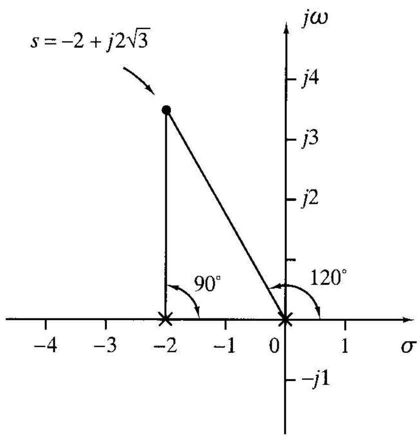


ในหน้าต่างนี้เราสามารถเพิ่มโพลและซีโร่ได้ ซึ่งระบบจะวาด root locus ใหม่ให้ทันทีซึ่งทำให้มีความสะดวกในการออกแบบ controller เพื่อให้ได้ตำแหน่งของโพล closed loop ตามที่เราต้องการ

เนื่องจากเราต้องการให้โพลของระบบ closed loop อยู่ในตำแหน่ง $s=-2\pm j2\sqrt{3}=-2\pm 3.46j$ (ดังแสดงด้วยลูกศรในภาพ) ดังนั้นเราต้องออกแบบระบบควบคุมที่สามารถดึงโพลมาที่ตำแหน่งดังกล่าวได้ ซึ่งในขณะนี้ที่ตำแหน่งดังกล่าวมีมุมรวมเป็น

$$\angle GH=\sum(\text{angle from zeros})-\sum(\text{angle from poles})$$
$$=0-(120^\circ+90^\circ)=-210^\circ$$

ดังแสดงในภาพต่อไปนี้

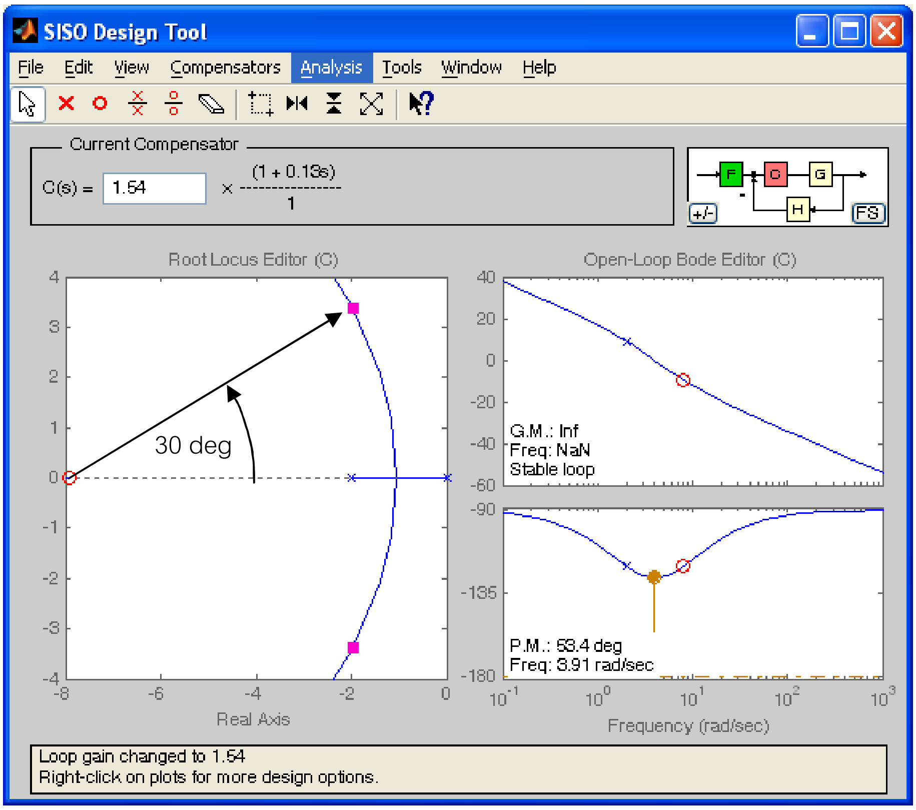


ทำให้เราต้องการ controller ซึ่งสามารถให้มุมเพิ่มอีก 30° ที่ตำแหน่งโพลนั้นเพื่อให้ได้มุมรวมที่ตำแหน่งนั้นเป็น -180° ($-210^\circ+30^\circ$) เพื่อให้สอดคล้องกับ angle condition

<u>Controller #1</u> เราสามารถใช้ PD controller ซึ่งมี transfer function ของ controller เป็น

$$G_c(s) = K_p + K_d s \text{ หรือ } G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า PD controller จะให้ซีโรเพิ่มอีกหนึ่งตัว ซึ่งเราสามารถเลือกตำแหน่งของซีโรนั้น เพื่อให้มุม 30 องศาจากซีโรที่เพิ่มเข้าไปดังแสดงในรูปต่อไปนี้

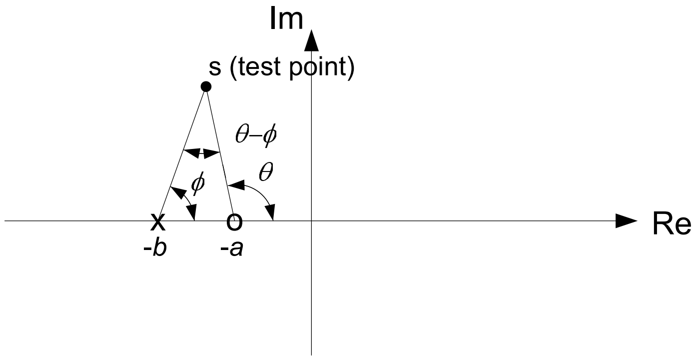


Lead-Lag Compensotor

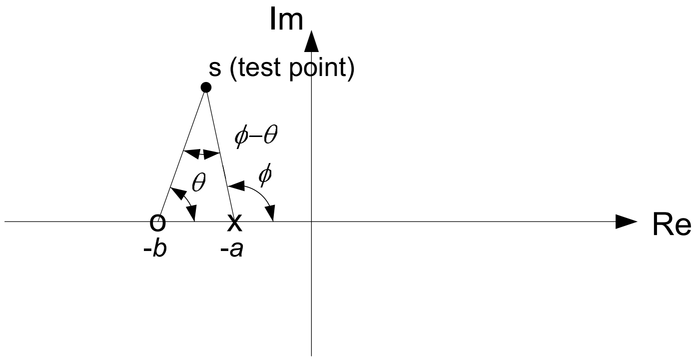
Lead-lag compensator มีไว้สำหรับในการเพิ่มหรือลดมุมใน angle condition รวมของระบบซึ่งมีผลให้ระบบมีแนวการเดินของ root locus เปลี่ยนแปลงไปตามที่เราต้องการได้ Transfer function ของ lead-lag compensation เป็นดังต่อไปนี้

$$G_c = K\frac{s+a}{s+b}$$

Lead compensator จะมีค่า $a < b$ ซึ่งทำให้มุม มุมจากโพลน้อยกว่ามุมจากซีโร ($\phi < \theta$) ซึ่งทำให้เพิ่มมุมให้กับระบบเท่ากับ ($\phi - \theta$) ดังรูป



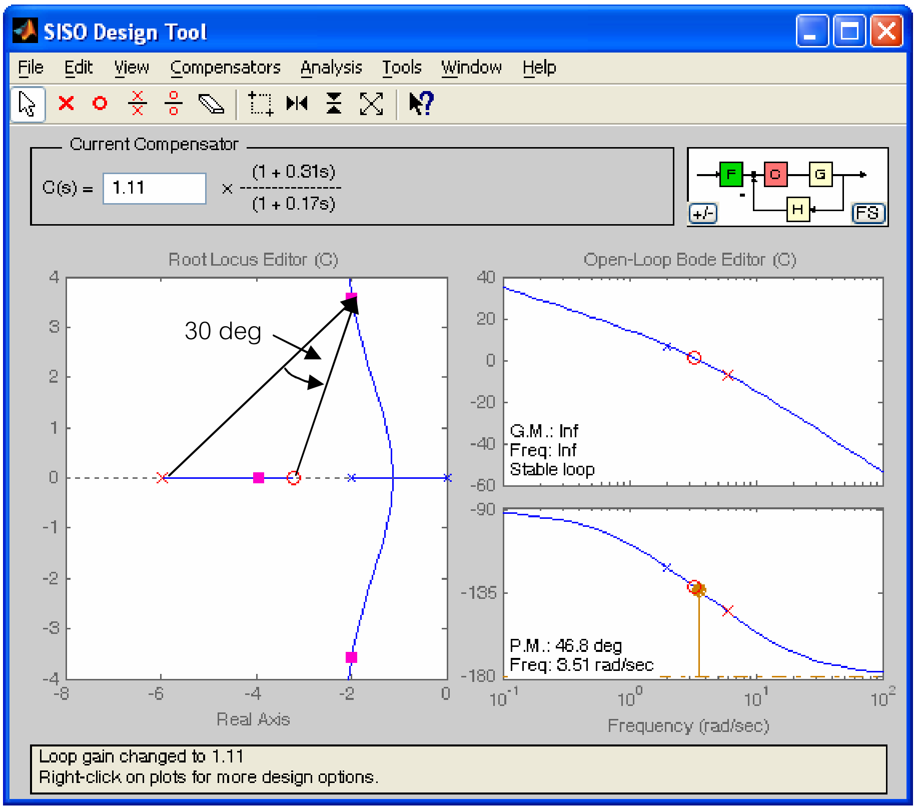
ส่วน Lag compenstor จะลดมุม จะมีค่า *a* > *b* ซึ่งทำให้มุม มุมจากโพลมากกว่ามุมจากซีโร ($\phi > \theta$) ซึ่งทำให้ลดมุมให้กับระบบเท่ากับ (θ- ϕ) ดังรูป



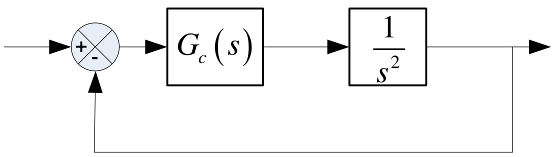
<u>Controller #2</u> หรือเราสามารถใช้ *lead compensator* ซึ่งอยู่ในรูปฟอร์ม

$$G_c = K\frac{s+a}{s+b} \text{ โดยที่ } a > b$$

ในการให้มุม 30 องศาจากซีโรและโพลที่เพิ่มเข้าไปดังแสดงในรูป



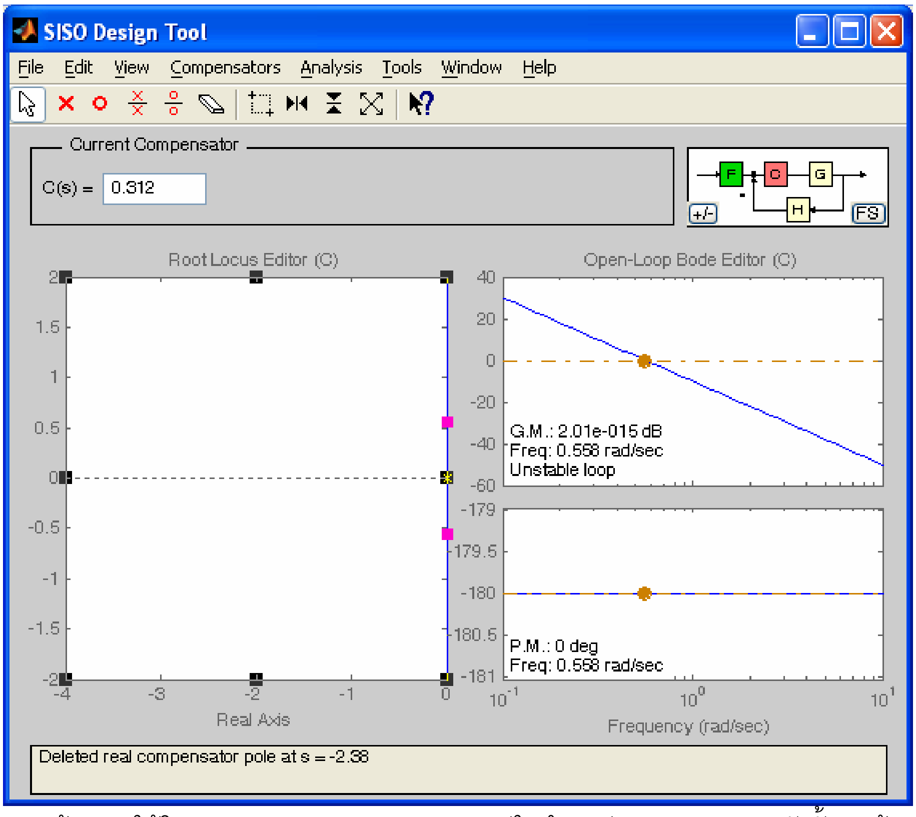
<u>ตัวอย่าง</u> จงออกแบบระบบควบคุมสำหรับระบบที่แสดงด้วย block diagram ต่อไปนี้ เพื่อให้ระบบมีตำแหน่งของ dominant closed loop poles ที่ $s=-1\pm j$



เช่นเดิมเราจะใช้คำสั่ง sisotool ในการช่วยออกแบบ โดยเราจะกำหนด plant ใน Matlab ชื่อ sys โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

```
num=[1];
den=[1 0 0];
sys=tf(num,den);
```

ถ้าใช้ proportional controller ระบบ closed loop จะมีโพลที่เป็นจำนวนจินตภาพ (จำนวนจริงเป็นศูนย์) ซึ่งหมายความว่าระบบจะแกว่งไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งไม่เป็นที่ต้องการ ดังนั้นเราจึงต้องใช้ controller ชนิดอื่นในการดึงตำแหน่งโพลมายังตำแหน่งที่เราต้องการ

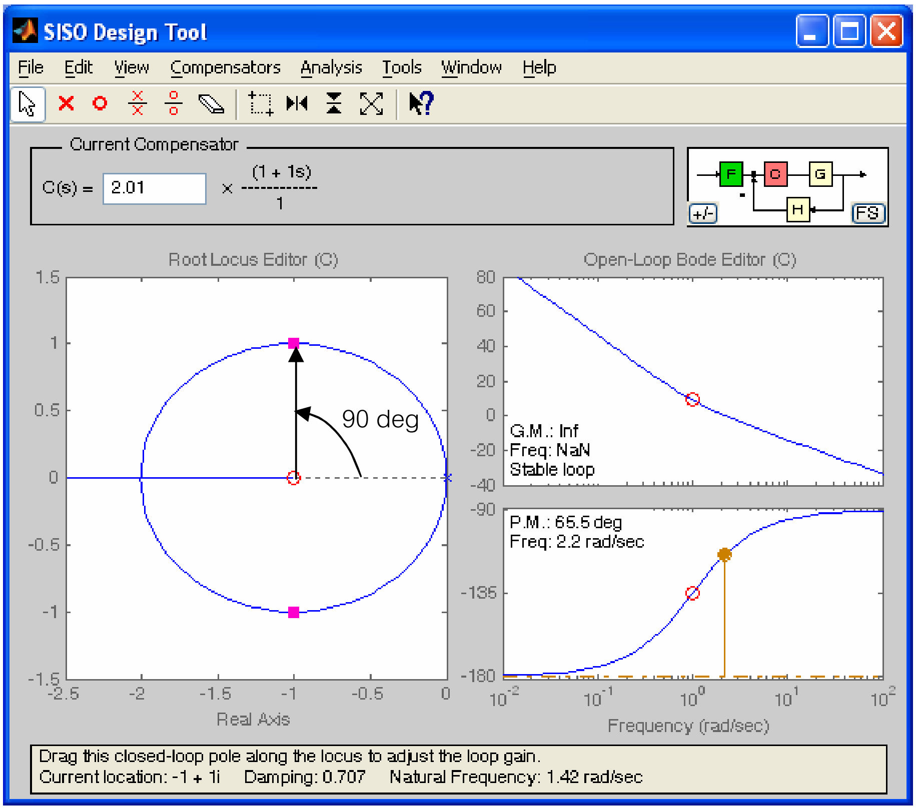


เนื่องจากเราต้องการให้โพลของระบบ closed loop อยู่ในตำแหน่ง $s=-1\pm j$ ดังนั้นเราต้องออกแบบระบบควบคุมที่สามารถดึงโพลมาที่ตำแหน่งดังกล่าวได้ ที่ตำแหน่งดังกล่าวมีมุมรวมเป็น

$$-135^\circ - 135^\circ = -270^\circ$$

ทำให้เราต้องการ controller ซึ่งสามารถให้มุมเพิ่มอีก 90° เพื่อทำให้มุมรวมที่ตำแหน่งโพลที่ต้องการเป็น -180° ($-270^\circ + 90^\circ$) ซึ่งสอดคล้องกับ angle condition

<u>Controller #1</u> เราสามารถใช้ PD controller ในการให้มุม 30° จากซีโรที่เพิ่มเข้าไปดังแสดงในรูป



<u>Controller #2</u> หรือเราอาจใช้ lead compenstor ในการให้มุมเพิ่มอีก 90° ก็ได้ดังแสดงในรูป