

บทที่ 8 การออกแบบระบบควบคุม (Design of Control Systems)

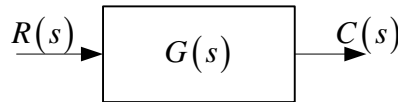
วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. ลดหรือแปลงรูป block diagram
2. อธิบายลักษณะการตอบสนอง และข้อดีข้อเสีย ของระบบควบคุมแบบต่างๆ
3. อธิบายผลของตัวควบคุมแบบ proportional, derivative และ integral
4. หาค่า steady-state value โดยการใช final value theorem
5. อธิบายความหมายของค่า transient-response specifications ต่างๆ
6. แบ่งประเภทชนิดของระบบ และใช้ชนิดในการบอกค่า steady-state error ของระบบต่อ input ชนิดต่างๆ ได้

8.1. Block Diagrams

8.1.1. Open-Loop Transfer Function

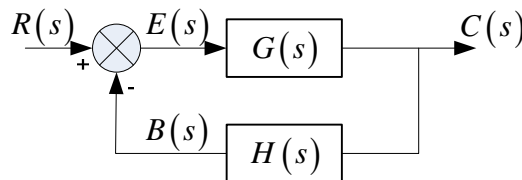


$$C(s) = G(s)R(s)$$

หรือในรูปของ T.F. คือ

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

8.1.2. Closed-Loop Transfer Function



เราจะสามารถหา transfer function รวมของระบบ closed loop ต่อไปนี้ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s)C(s) \end{aligned}$$

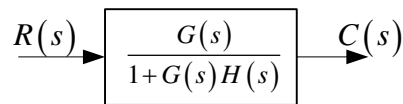
แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s) \\ &= G(s)(R(s) - H(s)C(s)) \\ &= G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s) \end{aligned}$$

จะจัดให้อยู่ในรูปของ T.F. $C(s)/R(s)$

$$\begin{aligned} C(s)(1 + G(s)H(s)) &= G(s)R(s) \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

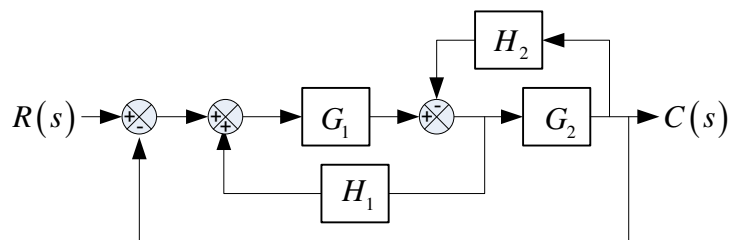
เราสามารถเขียน closed-loop block diagram ข้างต้นในรูปของ block diagram ที่ถูกลดรูปได้ดังต่อไปนี้



ตารางต่อไปนี้แสดงการเปลี่ยนรูปของ block diagram

Rule No.	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

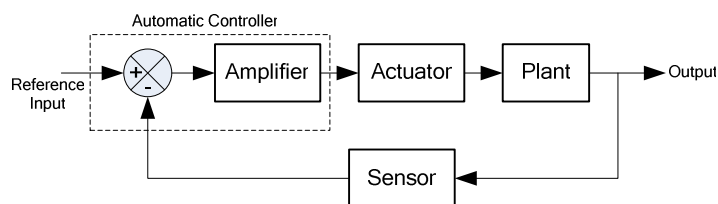
ตัวอย่าง จดลรูป block diagram ต่อไปนี้



$$R(s) \rightarrow \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2} \rightarrow C(s)$$

8.2. ระบบควบคุมอัตโนมัติ

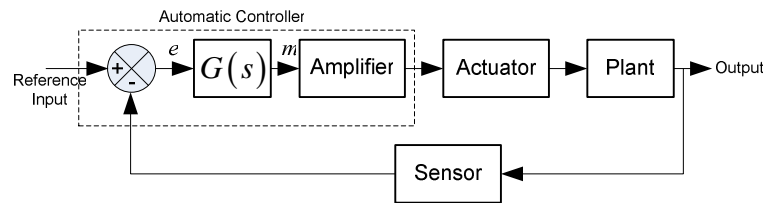
รูปที่ 1 แสดงรูปแบบของระบบควบคุมอัตโนมัติโดยทั่วไป ซึ่งเป็นระบบป้อนกลับ (feedback) โดยมีส่วนประกอบย่อยๆ หลายส่วน Plant เป็นระบบที่มีอยู่แล้วที่เราต้องการจะควบคุมค่าเอาท์พุทบางอย่างของมันเป็นตามที่เราต้องการ เช่น อาจจะเป็นระยะทาง ความเร็ว อุณหภูมิ เป็นต้น ดังนั้นเราจะต้องติดตั้งเซนเซอร์ (sensor) เพื่ออ่านค่าในขณะนั้น แล้วส่งไปเทียบกับค่าที่เราต้องการ (reference input) ซึ่งค่าแตกต่างเราเรียกว่าเป็น error จะถูกส่งไปยังตัวขยายสัญญาณ (amplifier) เพื่อที่จะขับเคลื่อน actuator ให้ plant มีการเปลี่ยนค่าไปสู่ค่าที่เราต้องการ



รูปที่ 1 Block Diagram ของระบบควบคุมอัตโนมัติทั่วไป

ถ้าระบบควบคุมอัตโนมัติได้รับการออกแบบดี ก็จะสามารถควบคุม plant ให้มีค่าเอาต์พุตตามที่เรต้องการได้ เรียกว่าง่าย ๆ ว่าสามารถควบคุมได้ ซึ่งระบบที่ควบคุมได้จะต้องมีเสถียรภาพ (stability) นอกจากนั้นถ้าระบบใช้เวลาสั้นในการให้ปรับสภาวะที่พหุที่เราต้องการก็เรียกว่าระบบควบคุมมีการตอบสนองเร็ว ถ้าใช้เวลามากก็เรียกว่าระบบควบคุมมีการตอบสนองช้า ซึ่งโดยมากแล้วมันจะไม่เป็นที่ต้องการ ดังนั้นการออกแบบที่ดีจึงต้องคำนึงถึงไม่เพียงแต่ว่าระบบสามารถควบคุมให้เอาต์พุตมีค่าตามต้องการได้เท่านั้น แต่ต้องมีการตอบสนองเป็นไปตามที่ต้องการด้วย ซึ่งรายละเอียดจะได้กล่าวต่อไป

รูปที่ 2 แสดงตำแหน่งของ block diagram $G(s)$ ซึ่งเป็นตัวควบคุม (controller) ของระบบป้อนกลับที่เราสามารถปรับแต่งให้ได้การตอบสนองตามที่เรต้องการได้ ตัวควบคุมมีหลายชนิดซึ่งต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับแต่ละงาน เราสามารถแยกเป็นชนิดต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2 แสดงตำแหน่ง block diagram ของ controller

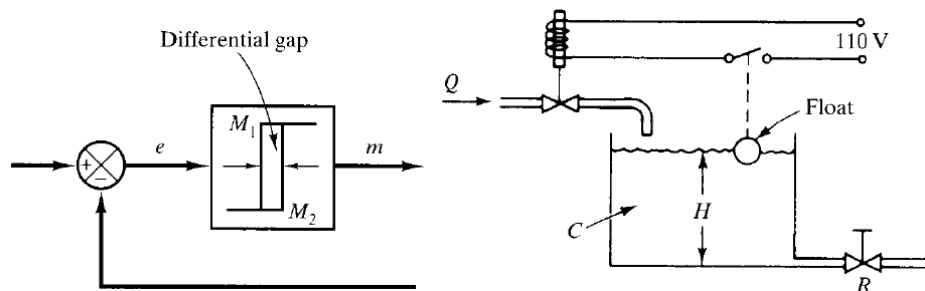
1. ระบบควบคุมแบบเปิดเปิด

ประเภทนี้มักใช้กับงานควบคุมที่ไม่ต้องการความแม่นยำนัก มีราคาถูก สามารถทำได้ง่าย เช่น ระบบปรับอากาศ ระบบกลอุยน้ำ เป็นต้น การควบคุมแบบเปิดปิดนี้ไม่ถือว่าเป็นระบบเชิงเส้นจึงไม่สามารถเขียนในรูปของ transfer function $G(s)$ ได้

ตัวควบคุมแบบเปิดปิดสามารถให้เอาต์พุตเพียงสองค่า คือเมื่อ error มากกว่าศูนย์จะให้ค่าหนึ่งและเมื่อ error น้อยกว่าศูนย์จะให้อีกค่าหนึ่ง ดังนี้

$$m(t) = \begin{cases} M_1, & e(t) > 0 \\ M_2, & e(t) < 0 \end{cases}$$

แต่ระบบเปิดปิดในลักษณะนี้ไม่สามารถทำงานได้ เนื่องจากระบบจะเปิดปิดตลอดเวลา ดังนั้นระบบควบคุมแบบเปิดปิดจะต้องมีช่วงขาขึ้นกับขาลงไม่เท่ากันเรียกว่า differential gap



2. Proportional controller (P-Controller)

$$G(s) = K_p$$

3. Integral controller (I-Controller)

$$G(s) = \frac{K_i}{s}$$

4. Proportional-Integral Controller (PI-Controller)

$$G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad \text{โดยที่ } K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

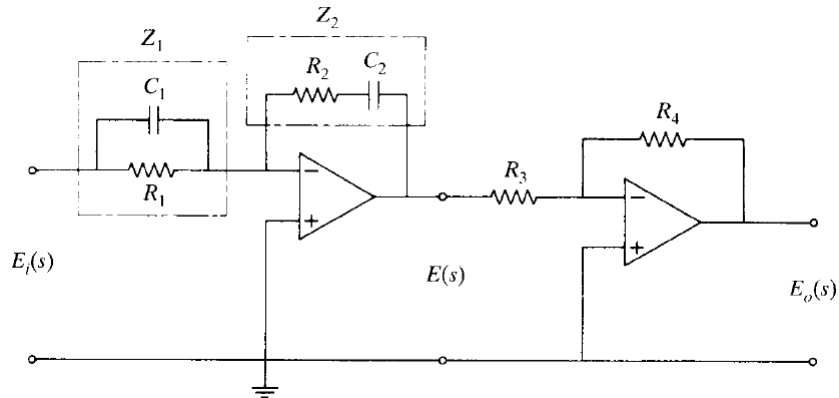
5. Proportional-Derivative Controller (PD-Controller)

$$G(s) = K_p (1 + T_d s) = K_p + K_d s \quad \text{โดยที่ } K_d = K_p T_d$$

6. Proportional-Integral-Derivative Controller (PID-Controller)

$$G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

ระบบควบคุม PID สามารถสร้างได้จากวงจร Op-Amp ดังวงจรในรูปที่ 3



รูปที่ 3 วงจรอิเล็กทรอนิกส์ของตัวควบคุม PID

สำหรับด้านอินพุท

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

โดยที่

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad \text{และ} \quad Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

ดังนั้น

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \right) \left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \right)$$

และสำหรับด้านเอาต์พุท

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

$$K_p = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4}{R_3} \left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \right) \left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \right) \\ &= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$K_p = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2}$$

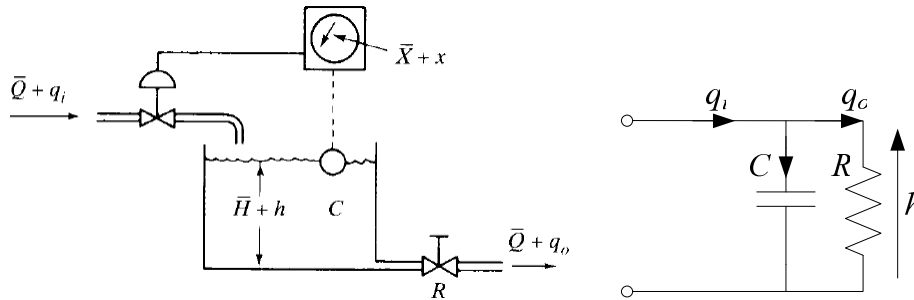
$$K_d = \frac{R_4 R_2 C_1}{R_3}$$

8.3. การตอบสนองของระบบควบคุมแบบต่างๆ

เมื่อเรารู้จักระบบควบคุมแบบต่างๆ แล้ว เราก็ควรที่จะรู้ว่าเราจะเลือกใช้ระบบควบคุมแบบต่างๆ อย่างไร เพื่อให้เราได้รับการตอบสนองของระบบตามต้องการ เราจะเริ่มจากการใช้ตัวควบคุมแบบ proportional ในระบบอันดับหนึ่ง จากนั้นจะเพิ่มตัวควบคุมแบบ integral และ derivative เพื่อดูว่ามีผลอย่างไรต่อการตอบสนองของระบบ

ในที่นี้เราจะพิจารณาระบบนำดังรูปซึ่งมี transfer function คือ

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$



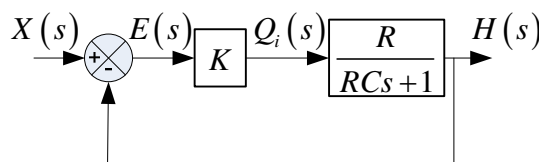
โดยที่ q_i คือปริมาณน้ำที่ไหลเข้าซึ่งปรับได้ด้วยวาล์วที่ต่อกับตัวควบคุม และ h คือระดับความสูงของน้ำในถัง

8.3.1. Proportional Control ของระบบอันดับหนึ่ง

เรากำหนดให้อัตราการไหลแปรผันตรงกับ error ซึ่ง error คือความแตกต่างระหว่างระดับน้ำที่ต้องการ x และระดับน้ำจริงในขณะนั้น h

$$q_i = Ke = K(x - h)$$

ซึ่งเราสามารถเขียน block diagram ของระบบควบคุมได้ดังต่อไปนี้



จาก block diagram นี้เราจะเขียน transfer function ระหว่าง $X(s)$ และ $H(s)$ ได้เป็น

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs + 1 + KR}$$

ซึ่งระบบ closed loop นี้เป็นระบบอันดับหนึ่ง เราจะลองหาคำตอบสนองเมื่อให้อินพุตเป็น unit-step function

$$X(s) = 1/s$$

$$H(s) = \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \cdot \frac{1}{s}$$

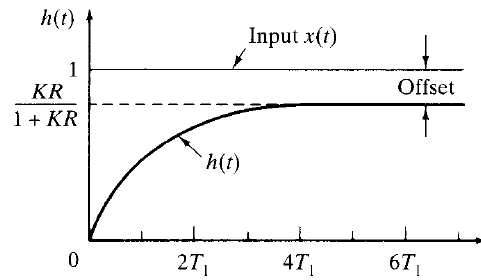
Partial fraction

$$H(s) = \frac{KR}{1 + KR} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1 + KR)/RC} \right]$$

$$h(t) = \frac{KR}{1 + KR} (1 - e^{-t/T})$$

เมื่อค่า time constant คือ

$$T = \frac{RC}{1 + KR}$$



ซึ่งอินพุตจะไม่เท่ากับเอาต์พุตโดยจะมีความแตกต่างที่เรียกว่า offset เท่ากับ $1 - \frac{KR}{1+KR}$ ซึ่งถ้าค่าเกน K มีค่ามากจะทำให้ค่า offset นี้มีค่าลดลงได้ แต่ไม่สามารถทำให้มีค่าเป็นศูนย์ได้ เราจะต้องใช้ตัวควบคุมแบบ integral เพื่อช่วยในการทำให้ค่า offset เป็นศูนย์

8.3.2. การหาค่า Steady-state Value โดยการให้ Final Value Theorem

ในกรณีส่วนมากถ้าเราต้องการหาค่า steady state เพียงอย่างเดียว โดยไม่ต้องการที่จะหาการตอบสนองของระบบทั้งหมด เราสามารถหาได้โดยการให้ final value theorem ซึ่งมีข้อแม้ในการใช้ final value theorem ว่าระบบจะต้องมีเสถียรภาพ คือ มีค่าคงที่ที่ไม่เป็นอนันต์เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น Final value theorem กล่าวว่า

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

สำหรับในข้อที่ผ่านเราสามารถให้ final value theorem ในการหาค่า $h(t)$ เมื่อเวลาเข้าใกล้อนันต์ได้โดย

$$\begin{aligned} h_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{KR}{RCs + 1 + KR} \frac{1}{s} \right] = \frac{KR}{1 + KR} \end{aligned}$$

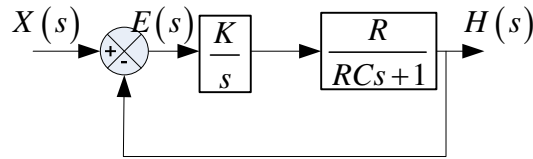
เนื่องจากอินพุตเป็น unit-step function ซึ่งฟังก์ชันจะมีค่าเท่ากับหนึ่ง ดังนั้นจะได้ steady-state error เป็น

$$e_{ss} = 1 - h_{ss} = 1 - \frac{KR}{1 + KR}$$

หรือเราอาจจะหา steady-state error โดยการให้ final value theorem กับ $E(s)$ เลยก็ได้เช่นกัน ซึ่งจาก block diagram เราจะได้

$$\begin{aligned} E(s) &= X(s) - H(s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \frac{1}{s} \\ e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{s} - \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \right] \\ &= 1 - \frac{KR}{1 + KR} \end{aligned}$$

8.3.3. Integral Control ของระบบอันดับหนึ่ง



$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{s(RCs+1) + KR} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

เมื่อให้อินพุทเป็น unit-step function หรือ $X(s) = 1/s$ เราสามารถหาลาปลาซฟังก์ชันของ error จาก

$$E(s) = X(s) - H(s) = \frac{1}{s} - \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

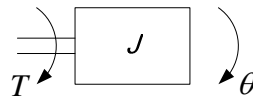
โดยการใช final value theorem เราสามารถหา steady-state error ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{s} - \frac{KR}{RCs^2 + s + KR} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{KR}{RCs^2 + s + KR} \right] \\ &= 1 - \frac{KR}{KR} = 0 \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าระบบจะไม่มี steady-state error เมื่อเราใช้ integral controller กับระบบดังกล่าว

8.3.4. Proportional Control ของระบบอันดับสองที่ไม่มี Damping

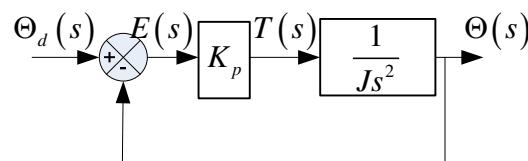
พิจารณาระบบ inertia load ดังรูปต่อไปนี้ ซึ่งเป็นระบบอันดับสองที่ไม่มี damping



ระบบการหมุนที่มีเพียง inertia load มีสมการคือ $J\ddot{\theta} = T$

แปลงลาปลาซเพื่อหา T.F. ได้ $\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$

เราจะต่อระบบควบคุมแบบ closed loop เพื่อควบคุมตำแหน่งการหมุนของมัน ดังแสดงได้ด้วย block diagram ต่อไปนี้



จาก block diagram ดังกล่าวเราสามารถหา T.F. ของระบบ closed loop ได้เป็น

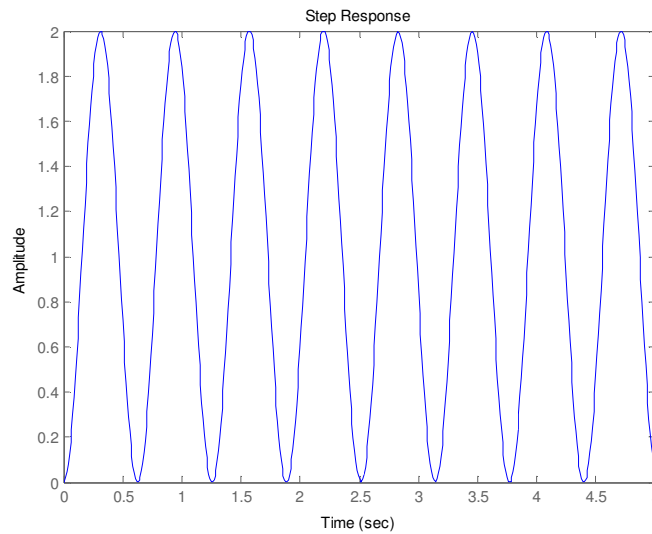
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

ถ้าให้อินพุทของระบบเป็น unit-step function $\Theta_d(s) = 1/s$

จะได้
$$\Theta = \frac{K_p}{Js^2 + K_p} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{Js}{Js^2 + K_p} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + K_p/J}$$

$$\theta = 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{K_p}{J}}t\right)$$

สมมติให้ $J = 2 \text{ kg-m}^2$ และ $K_p = 200$ จะได้กราฟการตอบสนองดังรูป



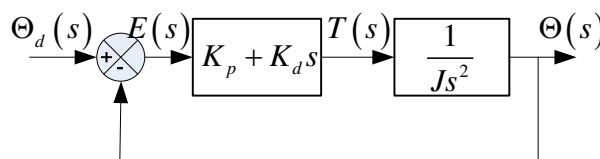
ซึ่งการตอบสนองจะทำให้เกิดการแกว่งอย่างไม่สิ้นสุด ไม่หยุดนิ่งที่ค่าใดค่าหนึ่ง ดังนั้นระบบนี้จึงไม่มีค่า steady-state ในกรณีนี้เราไม่สามารถใช้ final value theorem ได้ **จึงขอให้จำว่าการใช้ final value theorem จะต้องตรวจสอบก่อนทุกครั้งว่าระบบจะหยุดนิ่งที่ค่าใดค่าหนึ่งหรือไม่** โดยการตรวจสอบเสถียรภาพของระบบ ในระบบนี้การแกว่งโดยไม่หยุดนิ่งถือว่าการแกว่งมีเสถียรภาพหรือไม่เสถียรภาพ เนื่องจากระบบมีโพลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์ การตอบสนองในลักษณะนี้ไม่เป็นที่ต้องการ เราสามารถที่จะทำให้ระบบเกิดเสถียรภาพได้ โดยการเพิ่มส่วน derivative เข้าไปใน controller

8.3.5. Proportional-Derivative Control ของระบบอันดับสองที่ไม่มี Damping

Derivative control จะตอบสนองตามการอัตราการเปลี่ยนแปลงของ error ซึ่งเป็นการคาดคะเน error ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต เมื่อเราเพิ่ม derivative control เข้าไปใน proportional control ระบบจะสามารถปรับตาม error ได้รวดเร็วขึ้น และส่วนมากแล้วจะช่วยเพิ่มเสถียรภาพของระบบ

Derivative control จะไม่มีผลต่อ steady-state error ของระบบ เพียงแต่จะเพิ่มค่า damping ให้กับระบบรวม ดังนั้น derivative control K_d จึงสามารถมีค่าสูงได้ โดยไม่ทำให้ระบบเสียเสถียรภาพ แต่ถ้ามีค่ามากเกินไปก็จะทำให้ระบบตอบสนองช้าได้ เราจะไม่ใช่ derivative control เพียงตัวเดียว เพราะว่า derivative control ไม่ได้ตอบสนองต่อ error แต่ตอบสนองต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของมัน ดังนั้นเราจึงมักใช้ derivative control ร่วมกับ proportional control ด้วย

ต่อไปเราจะลองใช้ PD-control ในระบบ inertia load ข้างต้นเพื่อแสดงให้เห็นการใช้ derivative control ในการเพิ่มเสถียรภาพของระบบ

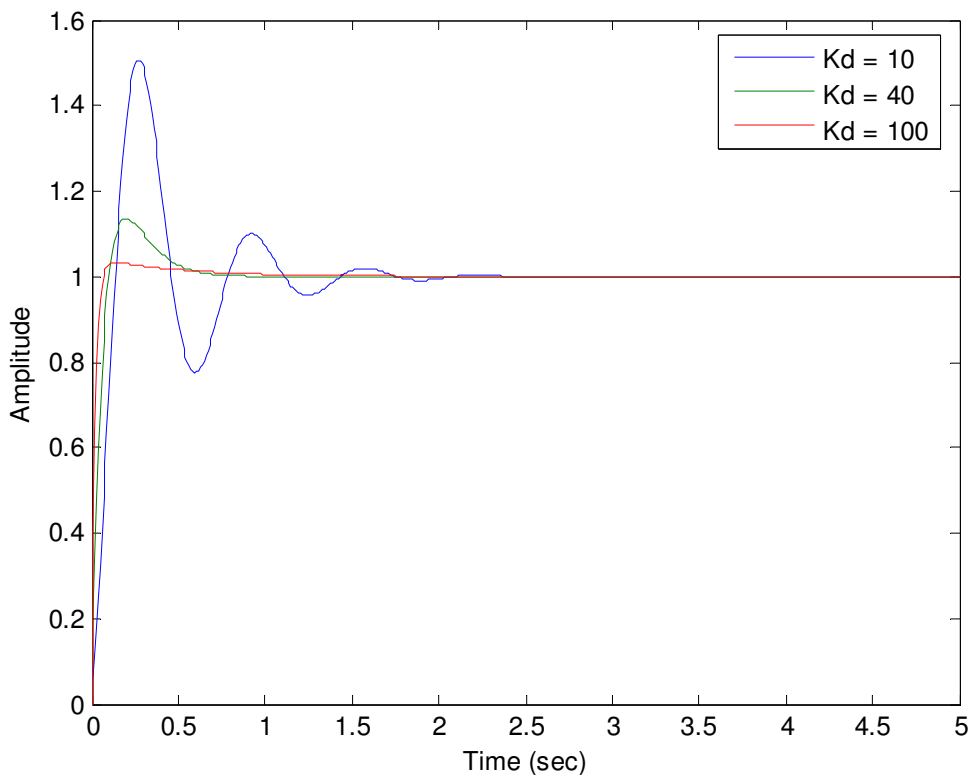


จาก block diagram ข้างต้น ทำให้ได้ T.F. ของระบบ closed loop เป็น

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + K_d s + K_p}$$

จะเห็นว่าค่าเกน K_d เป็นค่า damping ของระบบ closed loop ดังนั้นแสดงว่าถ้าเกน K_d มีค่ามาก ระบบก็จะมี damping มากด้วย

สมมติให้ $J = 2 \text{ kg-m}^2$ และ $K_p = 200$ เช่นเดิม และใช้ $K_d = 40$ ระบบ closed loop จะมี characteristic equation คือ $2s^2 + 40s + 200 = 0$ ซึ่งให้โพลจำนวนจริงซ้ำที่ $s = -10$ ซึ่งทำให้ระบบมีการตอบสนองแบบ critically damped ถ้า $K_d < 40$ ระบบ closed loop จะตอบสนองแบบ underdamped ซึ่งจะมีการแกว่งก่อนที่ค่าจะหยุดนิ่ง แต่ ถ้า $K_d > 40$ ระบบจะตอบสนองแบบ overdamped ซึ่งจะไม่มีการแกว่ง กราฟต่อไปนี้จะแสดงการตอบสนองของระบบที่ค่า $K_d = 10$, $K_d = 40$ และ $K_d = 100$ ตามลำดับ สังเกตว่าการใช้ derivative control ทำให้การตอบสนองของระบบดีขึ้นกว่าการใช้ proportional control เพียงอย่างเดียวอย่างเห็นได้ชัด

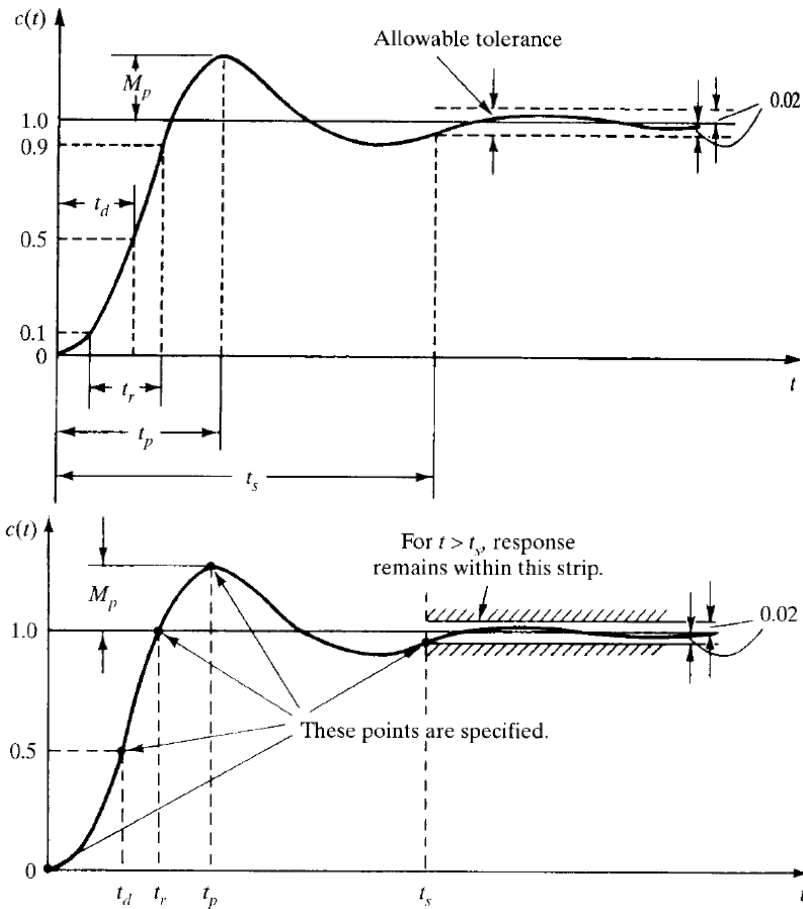


8.4. Transient-Response Specifications

ในการออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติเราจะกำหนด specifications ของระบบโดยการใช้อินพุทเป็น unit-step function ซึ่งมี initial condition ทุก derivative เป็นศูนย์ เนื่องจากระบบส่วนมากจะมีการแกว่งก่อนที่ค่าแอมพลิจูดจะลงจนอยู่นิ่ง (underdamped) เราจึงใช้รูปแบบนี้ในการกำหนด specifications ต่างๆ ของระบบ ดังต่อไปนี้

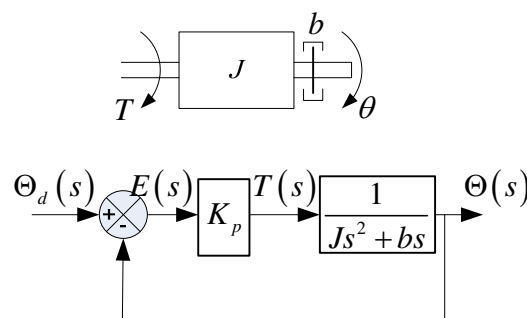
1. Delay time (t_d) คือเวลาที่ใช้ในการตอบสนองจะเพิ่มขึ้นถึงครึ่งหนึ่งของค่าสุดท้าย
2. Rise time (t_r) คือเวลาที่ใช้ในการตอบสนองจะเพิ่มขึ้นจาก 10% ถึง 90% หรือ 5% ถึง 95% หรือ 0% ถึง 100% ของค่าสุดท้าย ขึ้นอยู่กับการกำหนด สำหรับระบบ underdamped เรามักนิยมใช้ rise time 0% ถึง 100% ส่วนระบบ overdamped เรามักนิยมใช้ rise time 10% ถึง 90%
3. Peak time (t_p) คือเวลาที่ใช้ในการตอบสนองจะขึ้นถึงจุดสูงสุดเป็นครั้งแรก สำหรับระบบ overdamped จะไม่มี peak time

4. maximum percent overshoot คือ สัดส่วนของ ค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นไปจากค่า steady state ของระบบ หาด้วยค่า steady state ของระบบ หรือเท่ากับ M_p ในกรณีที่ค่า steady state ของระบบมีค่าเท่ากับหนึ่ง
5. settling time (t_s) คือเวลาที่ใช้เมื่อการตอบสนองมีค่าน้อยกว่า 5% ของค่า steady state ของระบบ



8.4.1. Transient-Response Specifications ของระบบอันดับสอง

ในที่นี้เราจะพิจารณาระบบควบคุมตำแหน่งของ inertia load และ damping ดังรูปโดยใช้ P-control



จะได้ T.F. ของระบบ closed-loop เป็นระบบอันดับสองที่ไม่มี zero ดังนี้

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + bs + K_p} = \frac{K_p / J}{s^2 + (b/J)s + (K_p / J)} = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

โดยที่

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{J}} = \text{undamped natural frequency}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{K_p J}} = \text{damping ratio}$$

เมื่อให้อินพุทเป็น unit-step function $\Theta_d = 1/s$ จะได้

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n) + \omega_d^2} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n) + \omega_d^2} \end{aligned}$$

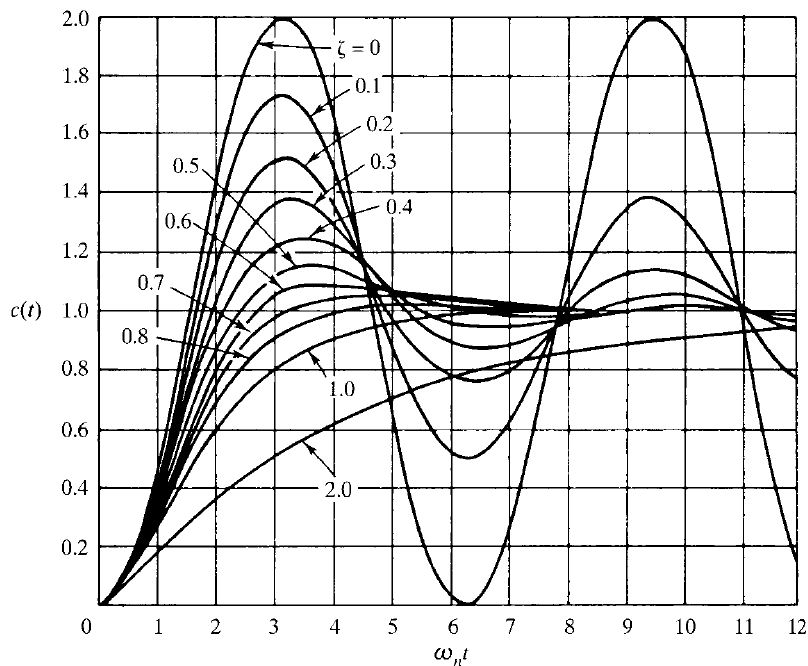
โดยที่ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

แปลงลาปลาซย้อนกลับจะได้

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \end{aligned} \tag{8.1}$$

หรือ

$$\theta(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \tag{8.2}$$



เมื่อการตอบสนองเป็น underdamped ($\zeta < 1$) เราจะสามารถหา specifications ต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

Rise time (t_r)

$$\theta(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t_r + \cos \omega_d t_r \right)$$

เนื่องจาก $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ ดังนั้น

$$\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t_r + \cos \omega_d t_r \right) = 0$$

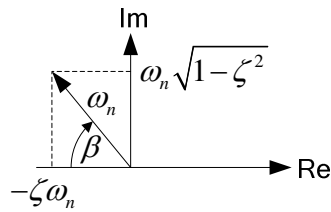
หรือ

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

ดังนั้น

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

โดยที่ β คือมุมของเวกเตอร์ที่นิยามดังในรูป



Peak time (t_p) ที่ตำแหน่งสูงสุดของการตอบสนองซึ่งที่ตำแหน่งนั้นจะมีความชันเป็นศูนย์ ดังนั้นเราจึง derivative สมการ (8.1) แล้วให้เท่ากับศูนย์จะได้

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

หรือ

$$\sin \omega_d t = 0$$

หรือ

$$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

สำหรับตำแหน่งสูงสุดแรกจึงได้

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Maximum overshoot (M_p) เกิดที่เวลา peak time ดังนั้นจึงสามารถหา M_p ได้จาก

$$\begin{aligned} M_p &= \theta(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi + \cos \pi \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ maximum percentage overshoot

$$M_p \times 100\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

Settling time (t_s)

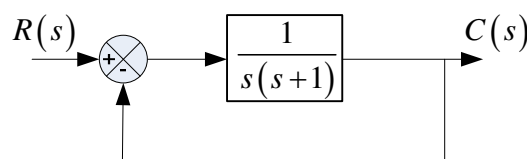
จากสมการ (8.2) เราสามารถหา settling time 2% ได้โดยการ

$$e^{-\zeta\omega_n t} = 0.02$$

$$-\zeta\omega_n t \approx -4$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

ตัวอย่าง จงหา rise time, peak time, maximum overshoot และ settling time สำหรับระบบ closed loop ที่แสดงด้วย block diagram ต่อไปนี้



วิธีทำ ในที่นี้เรามี closed loop T.F. เป็น

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

ซึ่งจาก T.F จะได้ว่า $\omega_n = 1$ และ $\zeta = 0.5$ และ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{1 - 0.5^2} = 0.866$ และ $\beta = \sin^{-1} 0.866 = 1.05$ rad

$$\text{Rise time, } t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 1.05}{0.866} = 2.41 \text{ s}$$

$$\text{Peak time, } t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{0.866} = 3.63 \text{ s}$$

$$\text{Maximum overshoot, } M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-(0.5)3.14/0.866} = e^{-1.81} = 0.163$$

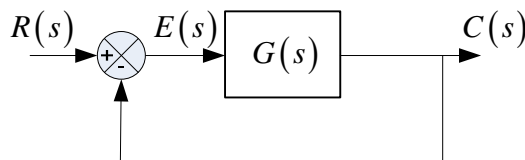
$$\text{Settling time, } t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5 \times 1} = 8 \text{ s}$$

8.5. การแบ่งประเภทชนิดของระบบ (System Types)

สำหรับระบบ open loop ที่มี T.F. ในรูปพหุคูณดังต่อไปนี้

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

เราเรียกระบบดังกล่าวว่าเป็น type 0, type 1, ... ถ้า $N = 0, N = 1, \dots$ ตามลำดับ



ถ้าระบบ closed loop แสดงโดย block diagram ข้างต้น เราจะได้ T.F. ของระบบ closed loop เป็น

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

แต่จาก block diagram จะเห็นว่า

$$C(s) = E(s)G(s)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

ซึ่งค่า steady state error สามารถหาได้ด้วย final value theorem

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$$

8.5.1. Steady state error ต่อ unit-step input

สำหรับ unit-step input $R(s) = 1/s$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

โดยเราจะนิยามค่า static position error constant เป็น

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

สำหรับระบบ type 0 ($N = 0$)

$$K_p = K$$

สำหรับระบบ type 1 และสูงกว่า

$$K_p = \infty$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{1}{1 + K}, & \text{for type 0 systems} \\ 0, & \text{for type 1 or higher systems} \end{cases}$$

8.5.2. Steady state error ต่อ unit-ramp input

สำหรับ unit-ramp input $R(s) = 1/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

โดยเราจะนิยามค่า *static velocity error constant* เป็น

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

สำหรับระบบ type 0 ($N = 0$)

$$K_v = 0$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

สำหรับระบบ type 1

$$K_v = K$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

สำหรับระบบ type 2 และสูงกว่า

$$K_v = \infty$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0$$

8.5.3. Steady state error ต่อ unit-parabolic input

Unit-parabolic input คือ $r(t) = t^2/2$ เมื่อ $t \geq 0$

ซึ่งมีลาปลาซเป็น

$$R(s) = 1/s^3$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

โดยเราจะนิยามค่า *static acceleration error constant* เป็น

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

สำหรับระบบ type 0 และ 1 ($N = 0, 1$)

$$K_a = 0$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

สำหรับระบบ type 2

$$K_a = K$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

สำหรับระบบ type 3 และสูงกว่า

$$K_a = \infty$$

ดังนั้น

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$$

ตารางต่อไปนี้จะแสดงสรุป steady-state error ของระบบ type ต่างๆ ต่ออินพุทชนิดต่างๆ

e_{ss}	Step input	Ramp input	Parabolic
Type 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Type 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Type 2	0	0	$\frac{1}{K}$