บทที่ 7 การวิเคราะห์ระบบในโดเมนเวลา (Time-Domain Analysis)

<u>วัตถุประสงค์</u>

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. อธิบายความหมายและหา characteristic equation ของระบบได้
2. หาโพล และซีโรของระบบ และอธิบายผลของตำแหน่งโพลที่มีต่อการตอบสนองของระบบได้
3. เขียนลักษณะการตอบสนองต่อ step function ของระบบอันดับหนึ่ง และอันดับสองได้
4. อธิบายความหมายและหาค่า time constant ของระบบอันดับหนึ่งได้
5. อธิบายการตอบสนองต่อ step function ของระบบอันดับสอง และอธิบายความสัมพันธ์ของตำแหน่งโพลที่มีต่อลักษณะการตอบสนองแบบ overdamped, critically damped และ underdamped ได้

7.1. สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) โพล (Poles) และซีโร(Zeros)

เพื่อประโยชน์ในการอธิบาย ขอให้พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่นิยามโดย

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) คือสมการที่แสดงคุณลักษณะของระบบ ซึ่งนิยามโดย การให้ส่วน (denominator) ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากฟังก์ชันถ่ายโอนข้างต้นจะมี characteristic equation คือ $R(s)=0$

โพล (Poles) คือ ค่ารากของ characteristic equation หรือค่าที่ทำให้ส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเป็นศูนย์

ซีโร (Zeros) คือ ค่าที่ทำให้เศษ (numerator) ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเป็นศูนย์

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าโพล และซีโรของระบบซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G(s)=\frac{10s+2}{s\left(s^2+2s+2\right)}$$

Characteristic equation คือ

$$s\left(s^2+2s+2\right)=0$$

สำหรับตัวอย่างนี้ ส่วนเป็น polynomial อันดับสาม จึงทำให้ระบบนี้เป็นระบบอันดับสาม และมีโพลจำนวน 3 ตัว ซึ่งเป็นรากของ characteristic equation ดังกล่าว ซึ่งมีค่าโพลเป็น $s=0,-1\pm i$

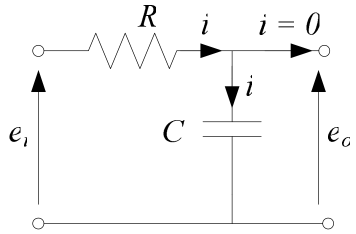
สำหรับค่าซีโร สามารถหาได้จากการแก้สมการ

$$10s+2=0$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าซีโรจำนวน 1 ตัว ซึ่งมีค่า s = 0.2 □

7.2. Transient Response ของระบบอันดับหนึ่ง

สมมติว่าเราต้องการหาการตอบสนองของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้ต่อ step-function เมื่อกำหนดให้แรงดัน e_i เป็นอินพุท และให้แรงดัน e_o เป็นเอาท์พุท



จากที่ได้เรียนมาแล้ววงจรนี้มี T.F. คือ $$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{1+CRs}$$

แรงดันอินพุทกำหนดให้เป็น step function คือ

$$e_i = A \cdot 1(t) \text{ หรือ } E_i = \frac{A}{s}$$

$$E_o = \frac{1}{1+CRs}\frac{A}{s} = A\left[\frac{1}{s} - \frac{CR}{1+CRs}\right]$$

$$= A\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{1/CR + s}\right]$$

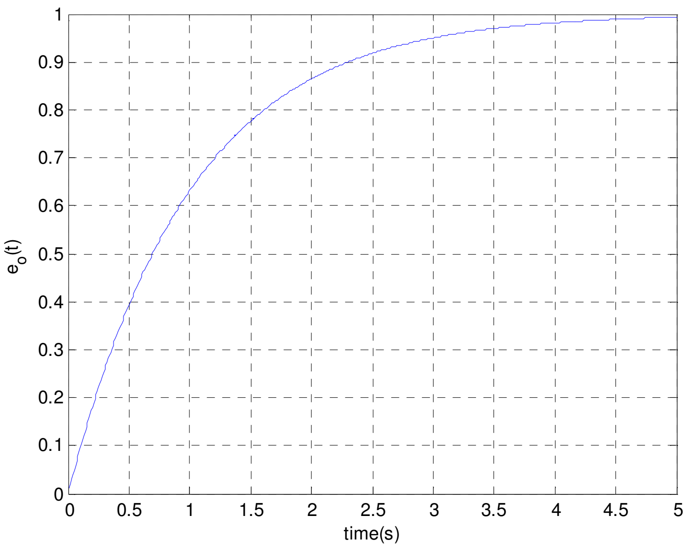
แปลงลาปลาสย้อนกลับจะได้ $$e_o = A\left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right]$$

$$e_o = A\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

เราเรียกค่า $T = RC$ ว่า time constant ของระบบ ซึ่งหมายความว่าเมื่อเวลาผ่านไป $t = T$ ระบบมีค่าเพิ่มเป็น

$$1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

หรือ 63.2 % เช่นสมมติว่าค่า time constant มีค่าเท่ากับหนึ่ง และ $A = 1$ จะได้กราฟการตอบสนองดังรูป



ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าถ้าระบบอันดับหนึ่งที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

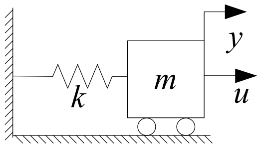
$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

ซึ่งมี characteristic equation เป็น $1 + Ts = 0$ และมีค่าโพลเป็น $s = -1/T$ โดยที่ T คือค่า time constant ของระบบ

7.3. Transient Response ของระบบอันดับสอง

7.3.1. กรณีที่ระบบไม่มีแดมเปอร์

ในที่นี้ไม่ได้หมายความถึงแต่แดมเปอร์ในระบบทางกลเท่านั้น แต่หมายถึงระบบอันดับสองใดๆ ก็ตามที่มีสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นศูนย์ เพื่อความเข้าใจง่ายเราจะยกตัวอย่างของระบบมวลสปริงดังต่อไปนี้



ซึ่งสมการของระบบมวล-สปริงคือ

$$m\ddot{y} + ky = u \tag{7.1}$$

จากสมการดังกล่าวเราจะเขียนแปลงลาปลาสจะได้ T.F. เป็น

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1/m}{s^2 + k/m}$$

การตอบสนองของระบบจะมีลักษณะขึ้นอยู่กับโพลของ T.F. ซึ่งสมการดังกล่าวมีโพลเป็น complex conjugate คือ $s = \pm i\sqrt{k/m}$ ทำให้มีการตอบสนองในรูปของฟังก์ชัน sinusoidal ที่มีความถี่ธรรมชาติเท่ากับ

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{7.2}$$

เราเรียกความถี่ธรรมชาตินี้ว่าเป็น undamped natural frequency

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าถ้าระบบอันดับสองที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$

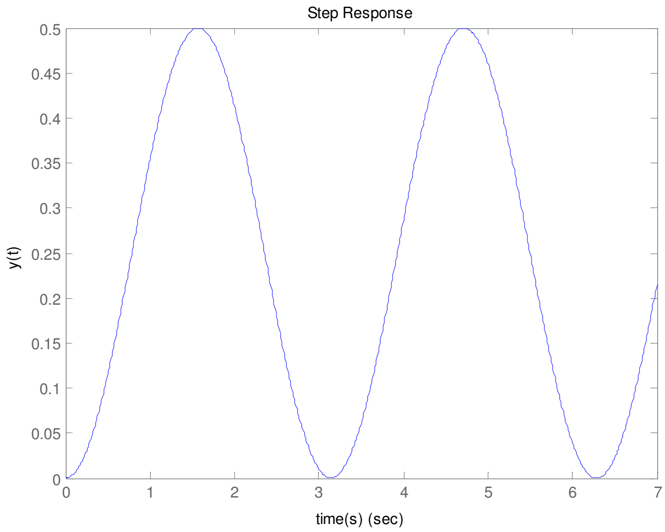
ซึ่งมี characteristic equation เป็น $s^2 + \omega_n^2 = 0$ และมีค่าโพลเป็นจำนวนจินตภาพ (ไม่มีส่วนจริง) $s = \pm i\omega_n$ โดยที่ ω_n คือค่าความถี่ธรรมชาติ (undamped natural frequency) ของระบบ

<u>ตัวอย่าง</u> เราจะสมมติให้ระบบมี $m = 1\ \mathrm{kg}$ และ $k = 4\ \mathrm{N/m}$ โดยที่มี input เป็น unit-step function $U = 1/s$

$$Y = \frac{1}{s^2+4}\frac{1}{s} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]$$

แปลงลาปลาสย้อนกลับจะได้ $$y(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

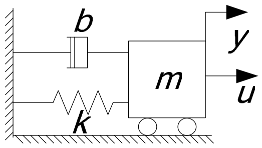
ซึ่งในที่นี้ระบบมี undamped natural frequency เป็น $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{4} = 2$ □



7.3.2. กรณีที่ระบบมีแดมเปอร์

การตอบสนองของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์สามารถจำแนกเป็นหลายแบบขึ้นกับขนาดแดมเปอร์ ถ้าแดมเปอร์อ่อน ระบบจะเกิดการแกว่ง (oscillatory) เป็นกราฟ sinusoidal คล้ายกับในระบบมวล-สปริง แต่แอมพลิจูดจะลดลงเรื่อยๆ ตามเวลาจนเป็นศูนย์ในที่สุด เราเรียกการตอบสนองในลักษณะนี้ว่าเป็น *underdamped* ถ้าระบบมีแดมเปอร์แข็งจะทำให้ระบบตอบสนองโดยไม่มีการแกว่งเกิดขึ้นเรียกการตอบสนองในลักษณะนี้ว่าเป็น *overdamped* ถ้าแดมเปอร์มีค่าความแข็งอยู่ระหว่างกลางทั้งสองแบบ กล่าวคือ มีแดมเปอร์ที่อ่อนที่สุดโดยที่ยังไม่ทำให้เกิดการแกว่ง เราเรียกการตอบสนองช่วงต่อนี้ว่าเป็นช่วงวิกฤติ หรือ *critically damped*

เราจะพิจารณาการตอบสนองของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์ในรูปข้างล่าง



ซึ่งสมการของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์คือ

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

จากสมการดังกล่าวเราจะสามารถเขียน T.F. ได้เป็น

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

ซึ่ง T.F ดังกล่าวมีโพลคือ

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

เราจะกำหนดตัวแปรใหม่ให้

ซึ่งเราจะแบ่งการตอบสนองได้เป็น 3 กรณีตามโพลของระบบดังต่อไปนี้

<u>**กรณีที่** 1 Overdamped</u> $b^2 - 4mk > 0$ โพลของระบบจะเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำ s_1, s_2 เราจะได้ผลเฉลยในรูปของฟังก์ชัน exponential ซึ่งการตอบสนองจะไม่มีการแกว่ง ดังนั้นจึงไม่มีความถี่ธรรมชาติ

<u>**กรณีที่** 2 Critically Damped</u> $b^2 - 4mk = 0$ โพลของระบบจะเป็นจำนวนจริงซ้ำคือ $s_1 = s_2 = -b/2m$ เราจะได้การตอบสนองในรูปของ exponential function ที่ไม่มีการแกว่งเช่นกัน แต่มีการตอบสนองเร็วกว่าแบบ overdamped

<u>กรณีที่ 3 Underdamped</u> $b^2 - 4mk < 0$ โพลของระบบจะเป็น complex conjugate คือ

$$s = \frac{-b}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \alpha \pm \beta i$$

โดยที่ $\alpha = -b/2m$ และ $\beta = \sqrt{4mk - b^2}/2m$ ซึ่งทำให้การตอบสนองของระบบเป็น sinusoidal function ที่มีแอมพลิจูดลดลงแบบ exponential โดยที่ส่วนเชิงซ้อนจะบอกถึงความถี่ในการแกว่งของระบบ และส่วนจริงจะเป็นตัวกำหนดอัตราการลดลงของแอมพลิจูด

เราจะเห็นว่าค่า damping ที่ทำให้มีการตอบสนองเป็น critically damped คือ $b = 2\sqrt{mk}$ เราจะนิยามตัวแปรที่เป็นสัดส่วนระหว่างของค่า damping จริง กับค่า damping ที่ทำให้การตอบสนองเป็น critically damped เรียกว่าเป็น

$$\text{damping ratio} = \zeta = \frac{\text{actual damping value}}{\text{critical damping value}} = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

และจาก (7.2) เรานิยาม undamped natural frequency คือ

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

จะได้

$$= \frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{m}\frac{1}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

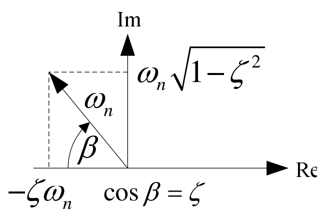
$$= \frac{1}{m}\frac{1}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_n^2\left(1 - \zeta^2\right)}$$

ดังนั้นโพลของระบบจะเขียนได้ในรูป

$$s = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

ดังนั้นระบบนี้จะมีความถี่ธรรมชาติเป็น $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ซึ่งเราเรียก ω_d ว่าเป็น damped natural frequency

รูปต่อไปนี้แสดงความหมายของตำแหน่งของโพลสำหรับระบบที่มีการตอบสนองแบบ underdamped



<u>ตัวอย่าง</u> สมมติให้ระบบมี $m = 1$ kg , $b = 2$ N-s/m และ $k = 4$ N/m (เพิ่มค่าแดมเปอร์จากตัวอย่างเดิม)

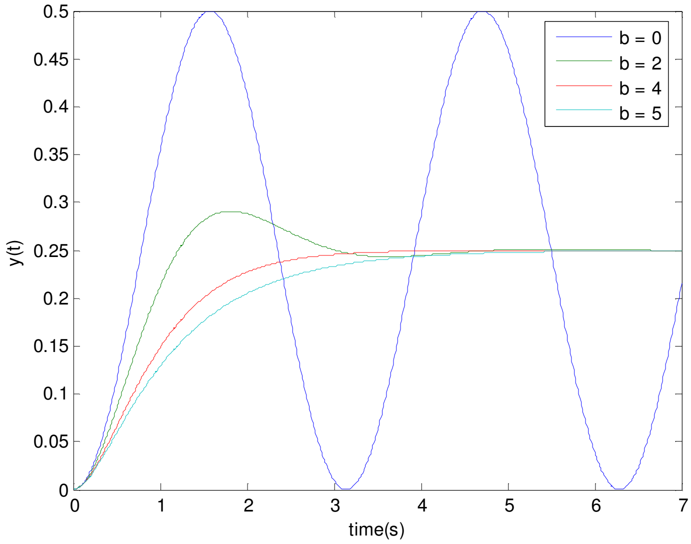
(Underdamped)

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติให้ระบบมี $m = 1$ kg , $b = 4$ N-s/m และ $k = 4$ N/m (เพิ่มค่าแดมเปอร์จากตัวอย่างเดิม)

(Critically damped)

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติให้ระบบมี $m = 1$ kg , $b = 5$ N-s/m และ $k = 4$ N/m (เพิ่มค่าแดมเปอร์จากตัวอย่างเดิม)

(Overdamped)


b = 0
b = 2
b = 4
b = 5
y(t)
time(s)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7