บทที่ 6 ระบบไฟฟ้า (Electrical Systems)

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวงจรไฟฟ้า
2. ใช้วิธีการ Complex Impedance ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวงจรไฟฟ้า
3. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์กระแสตรง (DC Motor)
4. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวงจร Operational Amplifier (Op Amp)

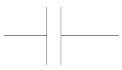
6.1. Electrical Elements

6.1.1. ตัวต้านทาน (Resistor)

$$e_R = iR$$

โดยค่าความต้านทาน R มีหน่วยเป็น $\text{ohm} = \dfrac{\text{volt}}{\text{ampere}}$

6.1.2. ตัวเก็บประจุ (Capacitor)



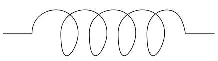
$$e_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \text{หรือ} \quad i = C\frac{de_C}{dt}$$

หรือเราอาจเขียนในรูปของจำนวนประจุที่เก็บไว้ q (หน่วยเป็น coulomb) เนื่องจาก $i = \dfrac{dq}{dt}$ (กระแสคืออัตราการไหลของประจุ) จะได้ว่า

$$e_C = \frac{q}{C}$$

โดยค่าความเก็บประจุ C มีหน่วยเป็น $\text{farad} = \dfrac{\text{ampere-second}}{\text{volt}} = \dfrac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$

6.1.3. ตัวเหนี่ยวนำ (Inductor)



$$e_L = L\frac{di_L}{dt}$$

โดยค่าความเหนี่ยวนำ L มีหน่วยเป็น $\text{henry} = \dfrac{\text{volt}}{\text{ampere/second}} = \dfrac{\text{weber}}{\text{ampere}}$

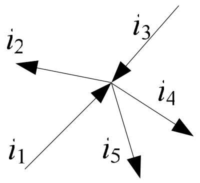
6.2. กฎของ Kirchhoff

กฎของ Kirchhoff มีสองข้อด้วยกันได้แก่

6.2.1. Current Law **หรือ** Node Law

ผลรวมของ**กระแส**ที่ไหลเข้าและออกที่**โหนด**อันหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง

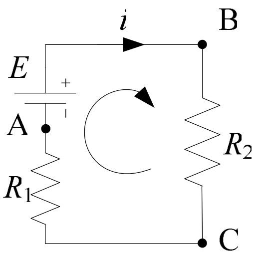


$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

6.2.2. Voltage Law **หรือ** Loop Law

ผลรวมของ**แรงดันไฟฟ้า**รอบ**ลูป**อันหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์

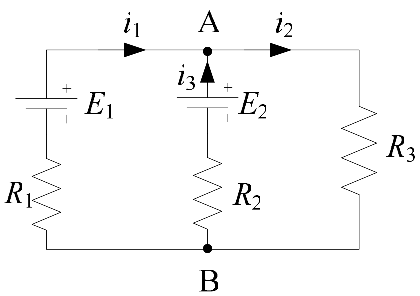
ตัวอย่าง



$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CA} = 0$$
$$-E + iR_2 + iR_1 = 0$$

ฉะนั้นจะได้ว่า $$i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

ตัวอย่าง



สมมติให้แต่ละแขนงของวงจรมีกระแสไหลดังรูป

โดยใช้ node law ที่โหนด A จะได้ $$i_1 + i_3 - i_2 = 0 \tag{4.1}$$

ใช้ loop law สำหรับลูปด้านซ้ายจะได้ $$-E_1 + E_2 - i_3R_2 + i_1R_1 = 0 \tag{4.2}$$

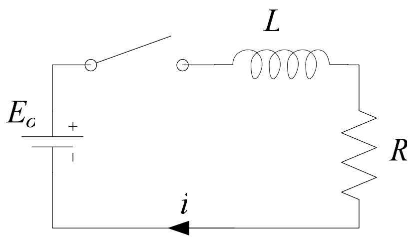
ใช้ loop law สำหรับลูปด้านขวาจะได้ $$-E_2 + i_2R_3 + i_3R_2 = 0 \tag{4.3}$$

หมายเหตุ ถ้าลองพิจารณาลูปรอบนอกทั้งหมดจะได้ $-E_1 + i_2R_3 + i_1R_1 = 0$ (4.4)
ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการนี้ไม่จำเป็น เพราะไม่ใช่เกิดสมการใหม่ สามารถสร้างได้จากสมการที่มีอยู่เดิมคือ (4.4) = (4.2) + (4.3)

6.3. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวงจรไฟฟ้า

เราสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบไฟฟ้าด้วยกฎของ Kirchhoff และสามารถหาลักษณะการตอบสนองของระบบต่อสัญญาณไฟฟ้าได้ ซึ่งจะได้แสดงให้เห็นด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

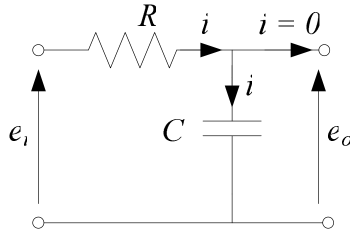
<u>**ตัวอย่าง**</u> จงหาฟังก์ชันของกระแสไฟฟ้าหลังจากที่สวิทช์ถูกปิดที่เวลา $t=0$



$$\vdots$$

$$i(t)=\frac{E_o}{R}\left[1-e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}\right] \qquad \square$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงหา transfer function ของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้แรงดัน e_i เป็นอินพุท และให้แรงดัน e_o เป็นเอาท์พุท นอกจากนี้ให้หาการตอบสนองเมื่อให้แรงดันอินพุทเป็น step function $e_i=A\cdot 1(t)$



เราจะสมมติว่าไม่มีการไหลของกระแสออกไปนอกวงจร (เช่นการวัดสัญญาณด้วย oscilloscope ซึ่งมีค่าความต้านทานภายในตัววัดสูง) ดังนั้นกระแสทั้งหมดที่ไหลผ่านตัวต้านทานก็จะไหลผ่านตัวเก็บประจุด้วย

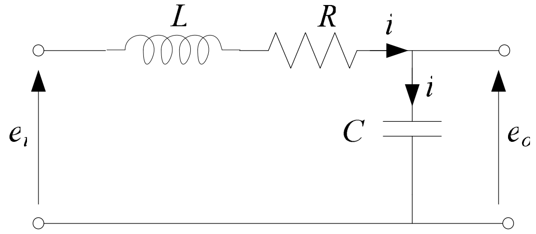
$$\vdots$$

$$\frac{E_o}{E_i}=\frac{1}{1+CRs}$$

$$\vdots$$

$$e_o=A\left[1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right] \qquad \square$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงหา transfer function ของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้แรงดัน e_i เป็นอินพุท และให้แรงดัน e_o เป็นเอาท์พุท



$$\vdots$$

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

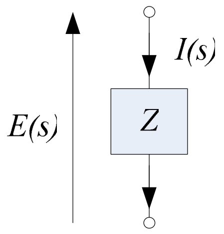
6.4. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ Complex Impedance

ตัวต้านทาน $e_R = iR$ แปลงลาปลาสได้ $E(s) = I(s)R \Rightarrow Z = R$

ตัวเก็บประจุ $e_C = \frac{1}{C}\int i dt$ แปลงลาปลาสได้ $E(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \Rightarrow Z = \frac{1}{Cs}$

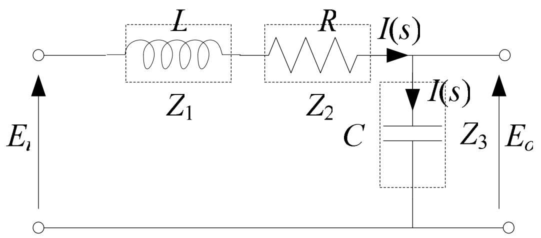
ตัวเหนี่ยวนำ $e_L = L\frac{di_L}{dt}$ แปลงลาปลาสได้ $E(s) = LsI(s) \Rightarrow Z = Ls$

โดยที่ *Z* คือ complex impedance ซึ่งสามารถใช้แทนได้ดังรูปต่อไปนี้



เราจะพิจารณาตัวอย่างเดิมอีกครั้งหนึ่งด้วยวิธี complex impedance ดังนี้

ตัวอย่าง จงหา transfer function ของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้แรงดัน e_i เป็นอินพุท และให้แรงดัน e_o เป็นเอาท์พุท



$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Ls \\ Z_2 &= R \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_1 + Z_2 = Ls + R$$

$$Z_3 = \frac{1}{Cs}$$

เนื่องจาก

$$E_i = I\left(Z_1 + Z_2 + Z_3\right)$$

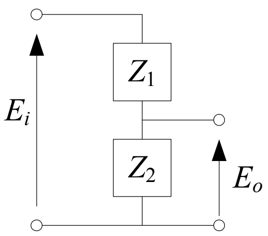
$$E_o = IZ_3$$

เอา E_o หารด้วย E_i จะได้ transfer function เป็น

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

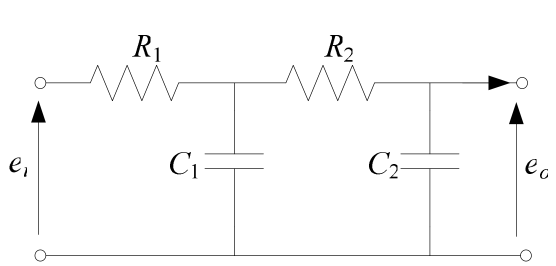
$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

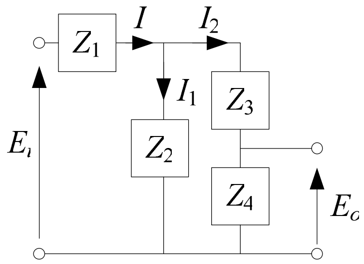
สัดส่วนของแรงดันไฟฟ้าในลักษณะนี้เรียกว่า *voltage divider* ซึ่งเป็นรูปแบบที่มีประโยชน์มากสำหรับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการ complex impedance



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา transfer function ของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้แรงดัน e_i เป็นอินพุท และให้แรงดัน e_o เป็นเอาท์พุท





$$Z_1 = R_1,\ Z_2 = \frac{1}{Cs},\ Z_3 = R_2 \text{ และ } Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

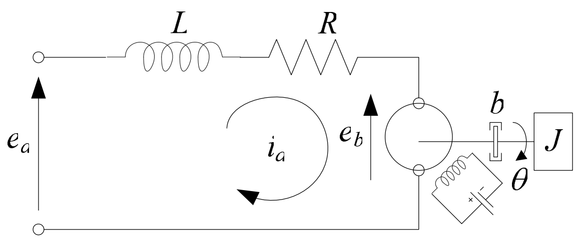
$$\vdots$$

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{Z_2 Z_4}{(Z_3 + Z_4)(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}$$ □

6.5. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์กระแสตรง (DC Motor)

มอเตอร์กระแสตรงเป็นอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่แปลงพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกลชนิดหนึ่ง ซึ่งเป็นมอเตอร์ที่นิยมใช้มากที่สุดเนื่องจากมีความง่ายในการใช้งานและควบคุม ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์จึงเป็นสิ่งที่สำคัญจะต้องรู้

มอเตอร์กระแสตรงสามารถที่จะเขียนแบบจำลองการทำงานได้ดังรูป ในที่นี้สมมติว่ามอเตอร์ถูกต่อแกนหมุนเข้ากับมวลที่มีค่า moment of inertia *J* และมีค่า damping *b* ซึ่งอาจจะเกิดจากการความหนืดภายในลูกปืนที่รองรับเพลาเป็นต้น เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าที่จ่ายให้กับมอเตอร์ e_a (อินพุท) และการหมุนของมอเตอร์ θ (เอาท์พุท) ในรูปของ transfer function $\Theta(s)/E(s)$



จากรูปจะเห็นได้ว่าในที่นี้ขดลวดอาร์มาเจอร์ (armature) ภายในมอเตอร์ถูกแทนด้วยตัวเหนี่ยวนำ *L* และตัวต้านทาน *R* แรงบิด (torque) ที่เกิดขึ้นจากมอเตอร์จะมีค่าแปรผันตรงกับกระแสที่ไหลผ่านขดลวด i_a และค่าฟลักซ์ (flux)

ψ แต่ในกรณีที่ฟลักซ์มีค่าคงที่ เช่นในมอเตอร์ที่ใช้แม่เหล็กถาวร (permanent magnet motor) จะได้ว่าแรงบิดจะแปรผันตรงกับกระแสเท่านั้น นั่นคือ

$$T = Ki_a$$

เมื่อขดลวดอาร์เมเจอร์หมุนจะทำให้เกิดการเหนี่ยวนำให้เกิดแรงดันย้อนกลับที่เรียกว่า back emf voltage ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการหมุนนั่นคือ

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

จากลูปของขดลวดอาร์เมเจอร์จะเขียนสมการได้เป็น

$$-e_a + i_a R + L\frac{di_a}{dt} + e_b = 0$$

แทนค่า e_b จะได้ $$-e_a + i_a R + L\frac{di_a}{dt} + K_b \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad (4.5)$$

สำหรับในส่วนทางกลจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับการหมุนดังนี้

$$T = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki_a \qquad (4.6)$$

แปลงลาปลาสสมการ (4.5) จะได้ $$-E_a + I_a R + LsI_a + K_b s\Theta = 0 \qquad (4.7)$$

จัดรูปได้ $$E_a = \left(R + Ls\right) I_a + K_b s\Theta \qquad (4.8)$$

แปลงลาปลาสสมการ (4.6) จะได้ $$Js^2\Theta + bs\Theta = KI_a$$

จัดรูปได้ $$I_a = \frac{\left(Js^2 + bs\right)}{K}\Theta$$

แทนค่า I_a ลงในสมการที่ (4.8) ได้

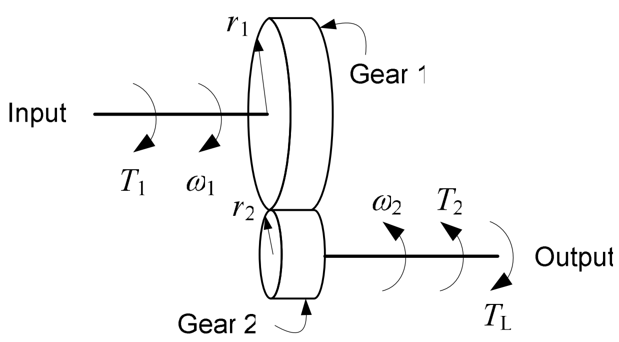
$$E_a = \left(R + Ls\right)\frac{\left(Js^2 + bs\right)}{K}\Theta + K_b s\Theta$$

$$= \frac{\left(R + Ls\right)\left(Js^2 + bs\right) + KK_b s}{K}\Theta$$

จะได้ transfer function เป็น $$\frac{\Theta}{E_a} = \frac{K}{\left(R + Ls\right)\left(Js^2 + bs\right) + KK_b s}$$ □

6.6. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเกียร์ทดรอบ

สมมติว่าเรามีระบบส่งกำลัง



เนื่องจาก pitch ของคู่เฟืองจะต้องเท่ากัน ดังนั้นรัศมีกับจำนวนซี่ฟันจึงเป็นสัดส่วนโดยตรงต่อกัน จะได้ว่า

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

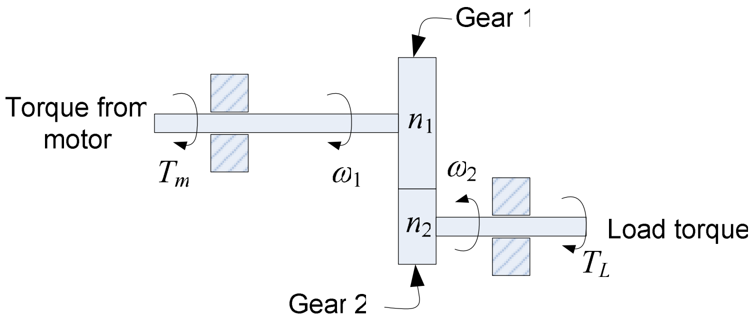
ความเร็วที่จุดสัมผัสของเกียร์ทั้งสองเท่ากับ $$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

ดังนั้นจะได้ $$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

แรงที่จุดสัมผัสของเกียร์ทั้งสองเท่ากับ $$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

ดังนั้นจะได้ $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

ตัวอย่าง จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดอินพุท T_m และแรงบิดเอาท์พุท T_L และความเร็วเชิงมุมด้านเอาท์พุท ω_2 ดังแสดงในรูป



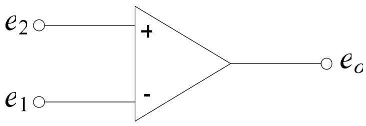
⋮

$$\left[J_2 + J_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\dot{\omega}_2 + \left[b_2 + b_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\omega_2 + T_L = \frac{n_2}{n_1}T_m$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_2 + b_{eq}\omega_2 + T_L = \frac{n_2}{n_1}T_m$$ □

6.7. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ Operational Amplifier (Op Amp)

วงจร op amp มีประโยชน์มากในการสร้างวงจรควบคุมต่างๆ จึงเป็นเรื่องที่ควรให้ความสำคัญอย่างยิ่ง ไม่น้อยกว่าระบบอื่นๆ



ความสัมพันธ์ของ Op Amp คือ

$$e_o = K\left(e_2 - e_1\right)$$

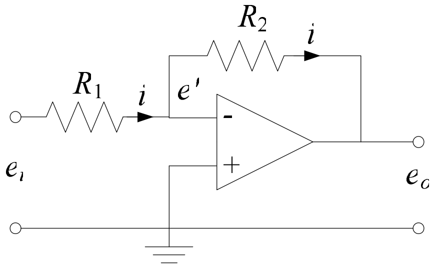
โดยปกติแล้วค่าเกนของ Op Amp จะมีค่าสูงมากๆ กล่าวคือ $K \approx 10^5 - 10^6$

<u>สมมติฐานสำหรับ ideal Op Amp</u>

1. เกน K มีค่าอนันต์ $K \to \infty$

2. ไม่มีกระแสไหลผ่านขั้วด้านขาเข้า (very high input impedance)
3. แรงดันขาออกไปเปลี่ยนตามโหลด (zero output impedance)

ตัวอย่าง พิจารณาวงจร Inverting amplifier จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง e_i และ e_o



วิธีทำ เนื่องจากไม่มีกระแสไหลเข้า op amp ดังนั้นกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_1 จะเท่ากับ R_2 เท่ากับ

$$i = \frac{e' - e_i}{R_1} = \frac{e_o - e'}{R_2}$$

$$e'\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{e_o}{R_2} + \frac{e_i}{R_1}$$

$$e' = \frac{\dfrac{e_o}{R_2} + \dfrac{e_i}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1 e_o + R_2 e_i}{R_2 + R_1}$$

จากสมการ op amp จะได้
$$e_o = -Ke' = -K\frac{R_1 e_o + R_2 e_i}{R_2 + R_1}$$

$$e_o + \frac{KR_1}{R_2 + R_1} e_o = -\frac{KR_2}{R_2 + R_1} e_i$$

$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{-\dfrac{KR_2}{R_2 + R_1}}{1 + \dfrac{KR_1}{R_2 + R_1}}$$

สำหรับค่า *K* ที่สูงมากๆ โดยการหาลิมิตของ $K \to \infty$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{e_o}{e_i} = \lim_{K \to \infty} \frac{-\dfrac{KR_2}{R_2 + R_1}}{1 + \dfrac{KR_1}{R_2 + R_1}} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_2 + R_1}}{\dfrac{R_1}{R_2 + R_1}} = -\frac{R_2}{R_1}$$ □

จะเห็นว่ากำลังขยายของวงจรนี้มีเครื่องหมายลบอยู่ ซึ่งทำให้เราเรียกวงจรนี้ว่าเป็น inverting op amp

วิธีที่ง่ายกว่า

เมื่อ $K \to \infty$ ความต่างศักย์ระหว่างอินพุททั้งสองของ op amp จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ จึงจะได้เอาท์พุทที่ไม่เป็นอนันต์ ดังนั้นสำหรับโจทย์ข้อต่อไปเราสามารถที่จะ**กำหนดให้ขาอินพุททั้งสองข้างของ op amp มีค่าแรงดันไฟฟ้าเท่ากัน**ได้เลย เช่นในข้อที่ผ่านมาสามารถคำนวณได้ดังนี้

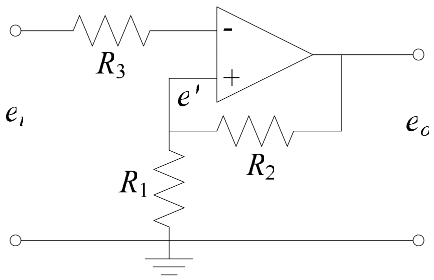
ดังนั้นอินพุทขาลบจะมีค่าแรงดันเท่ากับขาบวกคือ

$$e' = 0$$

$$i = \frac{e_i}{R_1} = -\frac{e_o}{R_2} \Rightarrow \frac{e_o}{e_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

จะเห็นว่าวิธีการนี้สะดวกกว่ามาก

ตัวอย่าง พิจารณาวงจร Non-inverting amplifier จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง e_i และ e_o

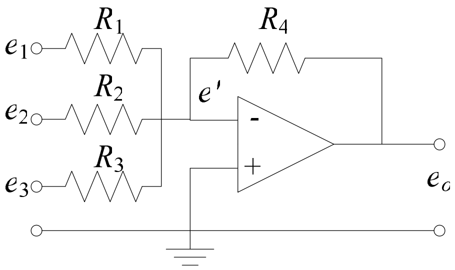


$$e_i = e' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o$$

$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

สำหรับวงจรนี้มีกำลังขยายที่ไม่ติดลบ จึงเรียกวงจรนี้ว่าเป็นวงจร non-inverting op amp

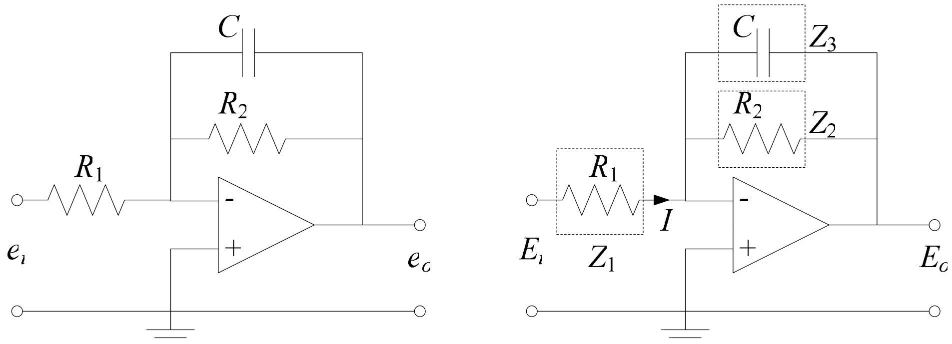
ตัวอย่าง พิจารณาวงจร Inverting adder จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง e_1, e_2, e_3 และ e_o



$$-\frac{e_o}{R_4} = \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3}\right)$$

$$e_o = -R_4\left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3}\right)$$

ตัวอย่าง พิจารณาวงจร Inverting low-pass filter จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง e_i และ e_o ในรูปของ transfer function



วิธีทำ เนื่องจากเรามี capacitor อยู่ในวงจรดังนั้นเราจะใช้วิธี complex impedance สำหรับโจทย์ข้อนี้ โดยที่

$$Z_1 = R_1,\ Z_2 = R_2 \text{ และ } Z_3 = \frac{1}{Cs}$$

Z_2 ต่อขนานกับ Z_3 จะได้ complex impedance รวมเป็น

$$Z_{23} = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + Cs} = \frac{R_2}{1 + R_2 Cs}$$

$$I = \frac{E_i}{Z_1} = -\frac{E_o}{Z_{23}}$$

$$\frac{E_o}{E_i} = -\frac{Z_{23}}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + R_2 Cs}$$ □