บทที่ 4 การจำลองระบบพลศาสตร์ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน

<u>วัตถุประสงค์</u>

โดยเมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนได้
2. หาการตอบสนองของระบบต่ออินพุทที่กำหนดให้ได้
3. ใช้โปรแกรม Matlab ในการหาการตอบสนองของระบบต่ออินพุทต่างๆ ได้

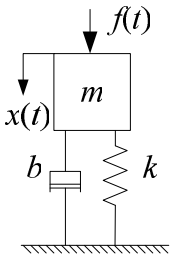
4.1. ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function)

ฟังก์ชันถ่ายโอน หรือ transfer function คือ อัตราส่วนระหว่างลาปลาสของเอาท์พุทกับลาปลาสของอินพุท โดยที่มี initial conditions ทุกตัวเป็นศูนย์

นั่นคือ
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{L(output)}{L(input)}$$

(หมายเหตุ - ฟังก์ชันถ่ายโอนนี้ใช้ได้กับระบบ linear time invariant เท่านั้น)

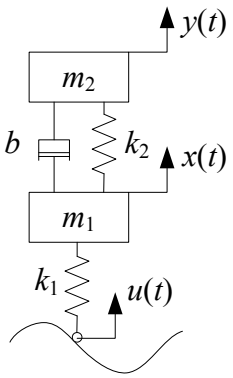
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(t)$ เป็นอินพุท และ $x(t)$ เป็นเอาท์พุทหรือการตอบสนอง จงหา transfer function ของระบบ



$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f(t)$$
$$\left(ms^2+bs+k\right)X(s)=F(s)$$
$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

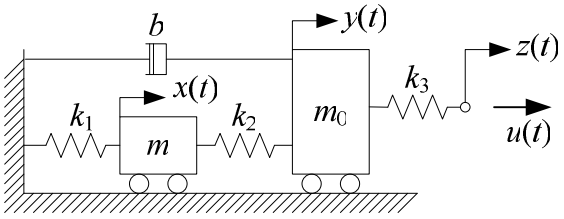
□

<u>ตัวอย่าง</u> จากระบบกันสะเทือนในภาพ จงหา transfer function $Y(s)/U(s)$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs+k_2)}{\left(m_1 s^2 + bs + (k_1+k_2)\right)\left(m_2 s^2 + bs + k_2\right) - (bs+k_2)^2} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา transfer function ของระบบโดยกำหนดให้แรง $u(t)$ เป็นอินพุท และระยะ $x(t)$ เป็นเอาท์พุท



$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{mbs^3 + mk_2 s^2 + (k_1+k_2)bs + k_1 k_2} \qquad \square$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนนิยมใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ เช่นเดียวกันกับสมการเชิงอนุพันธ์ แต่มีข้อดีกว่าตรงที่สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์ระบบได้สะดวกกว่าการใช้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง

เช่น ถ้ามีฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{4.1}$$

โดยที่ $Y(s)$ เป็นลาปลาสของเอาท์พุท และ $X(s)$ เป็นลาปลาสของอินพุท

ถ้าเราต้องการหาการตอบสนองของระบบ เราสามารถหาได้จาก

$$Y(s) = G(s)X(s) \tag{4.2}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[G(s)X(s)\right]$$

ซึ่งทำให้สามารถหาการตอบสนองของระบบต่ออินพุทรูปแบบต่างๆ ได้ง่าย

<u>Unit-Impulse Response</u>

สำหรับฟังก์ชัน unit impulse $x(t) = \delta(t)$

จะมีลาปลาสเป็น $X(s) = L\left[\delta(t)\right] = 1$

ดังนั้น unit-impulse response หรือ เอาท์พุทของระบบเมื่อมีอินพุทเป็นฟังก์ชัน unit impulse จะเท่ากับ

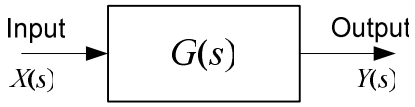
$$Y(s) = G(s)$$

หรือ $y(t) = g(t)$

ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า unit-impulse-response ก็คือลาปลาสย้อนกลับของ transfer function นั่นเอง

4.2. Block Diagrams

Block Diagram คือ แผนภาพบล็อกที่ใช้แทนคำอธิบายระบบ จากภาพระบบมี transfer function $G(s)$ มีลาปลาสของอินพุท $X(s)$ ซึ่งแสดงโดยลูกศรที่ชี้เข้ามายังกล่อง และมีลาปลาสของเอาท์พุทของระบบ $Y(s)$ ซึ่งแสดงโดยลูกศรที่ชี้ออกจากกล่อง



จะเห็นว่าเอาท์พุทสามารถหาได้จากการเอาอินพุทคูณด้วย transfer function ดังสมการที่ (4.2) คือ

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

4.3. การหา Partial-Fraction Expansion โดยใช้โปรแกรม Matlab

สำหรับ transfer function

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^m + b(2)s^{m-1} + \cdots + b(m+1)}{a(1)s^n + a(2)s^{n-1} + \cdots a(n+1)}$$

เราสามารถกำหนด transfer function โดยการกำหนดสัมประสิทธิ์ของ numerator (เศษ) และ denominator (ส่วน) ในรูปของเวกเตอร์ดังต่อนี้

$$num = \begin{bmatrix} b(1) & b(2) & \cdots & b(m+1) \end{bmatrix}$$
$$den = \begin{bmatrix} a(1) & a(2) & \cdots & a(n+1) \end{bmatrix}$$

เราจะใช้คำสั่งต่อไปนี้ในการหาค่า

$$[r, p, k] = residue(num, den)$$

ซึ่งจะหาค่า residues, poles และเทอมผลหาร (ในกรณีที่เศษมีอันดับสูงกว่าส่วน) ในรูปฟอร์ม

$$\frac{B(s)}{A(s)} = k(s) + \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots \frac{r(n)}{s-p(n)}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^4 + 8s^3 + 16s^2 + 9s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

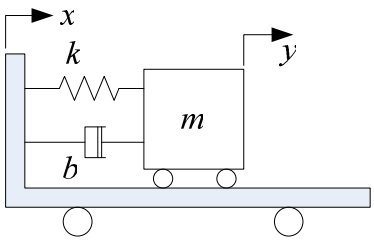
จะเขียนเป็นโปรแกรม Matlab ได้ดังต่อไปนี้

```
>> num = [1 8 16 9 6];
>> den = [1 6 11 6];
>> [r,p,k] = residue(num,den)

r =

   -6.0000
   -4.0000
    3.0000

p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k =

     1     2
```

จากคำตอบที่ได้จาก Matlab จะนำมาเขียน partial fraction expansion ได้ดังนี้

$$\frac{B(s)}{A(s)} = s+2+\frac{-6}{s+3}+\frac{-4}{s+2}+\frac{3}{s+1}$$

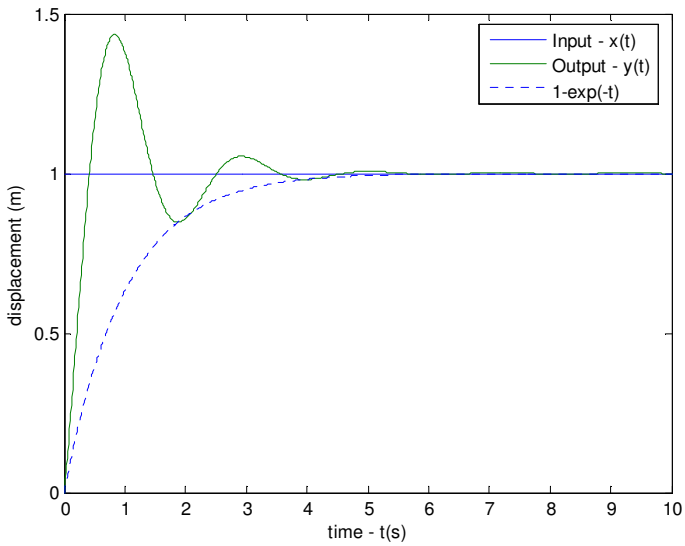
<u>ตัวอย่าง</u> ในระบบทางกลที่แสดงในภาพ กำหนดให้ $x(t)$ เป็นอินพุท $y(t)$ เป็นเอาท์พุท จงหา unit-step input response ของระบบต่อไปนี้ (ให้ใช้ Matlab ในการช่วยหา partial fraction expansion)



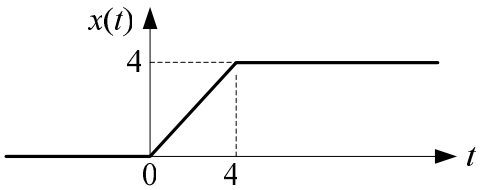
กำหนดให้ $m = 10$ kg , $b = 20$ N-s/m และ $k = 100$ N/m

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{20s+100}{10s^2+20s+100}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$ □



<u>ตัวอย่าง</u> จากตัวอย่างเดิม จงหาการตอบสนองของระบบต่ออินพุทที่กำหนดโดยกราฟต่อไปนี้



$$x(t) = t\cdot 1(t) - (t-4)\cdot 1(t-4)$$

แปลงลาปลาสจะได้ $$X(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-4s}\frac{1}{s^2} = \left(1-e^{-4s}\right)\frac{1}{s^2}$$

จาก
$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{20s+100}{10s^2+20s+100}$$

จะได้
$$Y(s)=\frac{20s+100}{10s^2+20s+100}X(s)$$
$$=\frac{20s+100}{10s^2+20s+100}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-4s}\right)$$

แยก partial fraction โดยใช้โปรแกรม Matlab ดังนี้

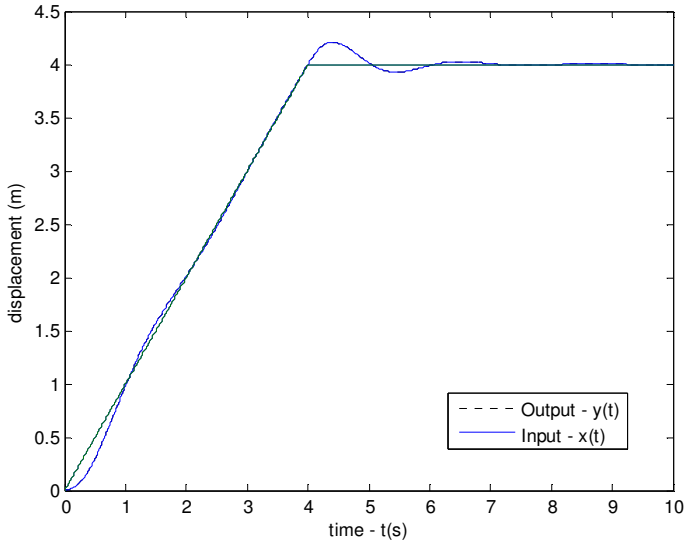
```
>> num=[20 100];
>> den=[10 20 100 0 0];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

        0 + 0.1667i
        0 - 0.1667i
        0
   1.0000


p =

  -1.0000 + 3.0000i
  -1.0000 - 3.0000i
        0
        0


k =

     []
```

จะได้

$$Y(s)=\left(1-e^{-4s}\right)\left[\frac{1}{s^2}+\frac{0.1667i}{s+1-3i}+\frac{-0.1667i}{s+1+3i}\right]$$
$$=\left(1-e^{-4s}\right)\left[\frac{1}{s^2}+\frac{0.1667i(s+1+3i)-0.1667i(s+1-3i)}{(s+1)^2+3^2}\right]$$
$$=\left(1-e^{-4s}\right)\left[\frac{1}{s^2}+\frac{0.1667i(6i)}{(s+1)^2+3^2}\right]$$
$$=\left(1-e^{-4s}\right)\left[\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{(s+1)^2+3^2}\right]$$

แปลงลาปลาสย้อนกลับจะได้

$$y(t)=1(t)\left(t-\frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t\right)-1(t-4)\cdot\left[(t-4)-\frac{1}{3}e^{-(t-4)}\sin 3(t-4)\right]$$



4.4. การหาการตอบสนองของระบบต่ออินพุทโดยใช้โปรแกรม Matlab

4.4.1. การกำหนดระบบ

ในการกำหนดระบบให้กับโปรแกรม Matlab เราจะกำหนดด้วยคำสั่ง

```
sys = tf(num,den)
```

4.4.2. การหา step response

ในการหา step response ด้วยโปรแกรม Matlab เราสามารถใช้คำสั่ง

```
y = step(sys), y = step(num,den)
```

ถ้าต้องการกำหนดแกนเวลาเองใช้

```
y = step(sys,t), y = step(num,den,t)
```

ย้อนกลับไปที่ตัวอย่างเดิม ซึ่งเราได้หา step response เองก่อนหน้านี้แล้วในรูป closed form เราสามารถใช้โปรแกรม Matlab ในการหา step response ได้โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

```
>> num=[20 100];
>> den=[10 20 100];
>> sys=tf(num,den)

Transfer function:
    20 s + 100
-------------------
10 s^2 + 20 s + 100

>> t=0:0.01:10;
>> y=step(sys,t);
>> plot(t,y)
>> xlabel('time - t(s)')
>> ylabel('displacement (m)')
```

ซึ่งเราก็จะได้กราฟ step response เช่นเดียวกับก่อนหน้านี้

4.4.3. การหา impulse response

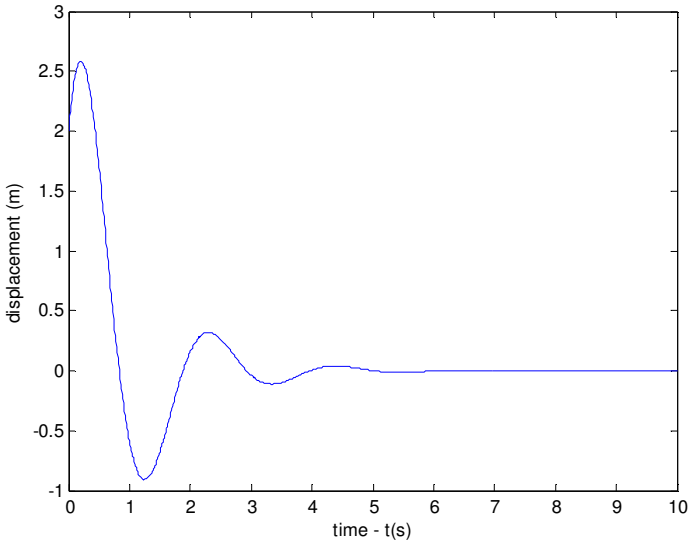
ในการหา impulse response ด้วยโปรแกรม Matlab เราสามารถใช้คำสั่ง

```
y = impulse(sys), y = impulse(num,den)
```

ถ้าต้องการกำหนดแกนเวลาเองใช้

```
y = impulse(sys,t), y = impulse(num,den,t)
```

จากตัวอย่างเดิมเพียงแต่เปลี่ยนคำสั่งจากคำว่า step เป็น impulse จะได้



4.4.4. การหาการตอบสนองต่อฟังก์ชันที่กำหนดเอง

ใช้คำสั่ง

```
y = lsim(sys,u,t), y = lsim(num,den,u,t)
```

เช่นในตัวอย่างที่แล้วที่มีอินพุทเป็นฟังก์ชัน

$$x(t) = t \cdot 1(t) - (t-4) \cdot 1(t-4)$$

เราสามารถหาการตอบสนองได้โดยใช้คำสั่ง

```
>> num=[20 100];
>> den=[10 20 100];
>> sys=tf(num,den);
>> t=[0:0.01:10]';
>> x=t-(t>=4).*(t-4);
>> y=lsim(sys,x,t);
>> plot(t,[x y])
>> xlabel('time - t(s)')
>> ylabel('displacement (m)')
>> legend('Output - x(t)','Input - y(t)')
```

ซึ่งเราจะได้กราฟเช่นเดียวกับก่อนหน้านี้