บทที่ 3 **ระบบทางกล** (Mechanical Systems)

<u>วัตถุประสงค์</u>

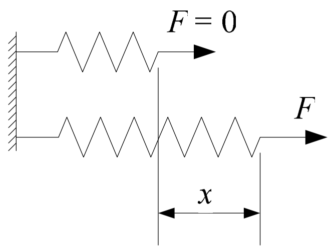
เพื่อทบทวนวิธีการแปลงลาปลาส โดยเมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกลที่กำหนดให้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้
2. หาความถี่ธรรมชาติของระบบที่กำหนดให้ได้
3. หาการตอบสนองตามธรรมชาติของระบบที่กำหนดให้ได้

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับระบบทางกล โดยจะกล่าวถึงระบบทางพลศาสตร์เป็นหลัก เนื่องจากการควบคุมของระบบส่วนมากต้องการทราบการตอบสนองของระบบที่ขึ้นกับเวลา

3.1. Mechanical Elements

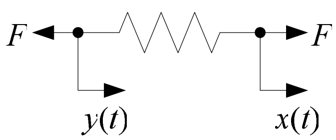
3.1.1. **สปริง** (Springs)



จากรูปหากออกแรงดึง F สปริงจะยืดออกเป็นระยะ x และในทางตรงกันข้าม หากออกแรงกด F สปริงก็จะหดตัวเป็นระยะ x ด้วย สปริงส่วนมากจะมีระยะยืด (หรือหด) สัมพันธ์โดยตรงกับแรงดึง (หรือกด) ดังสมการ

$$F = kx$$ (เรียกว่า Linear spring)

ถ้าปลายทั้งสองข้างของสปริงมีการเคลื่อนที่ดังรูป แรงที่เกิดขึ้นจากการยืดตัวของสปริงจะมีค่าแปรตามระยะยืดออก $\left(x-y\right)$ ดังนั้นเราจะสามารถเขียนได้ว่า $F = k\left(x-y\right)$

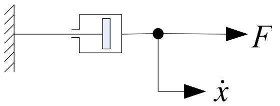


ในลักษณะเดียวกัน torsional spring ก็มีความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด τ และมุมที่บิดไป θ เป็นเชิงเส้น

$$\tau = k\theta$$ (Torsional spring)

3.1.2. **แดมเปอร์** (Dampers)

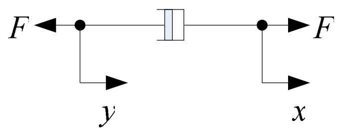
แดมเปอณ์เป็นอุปกรณ์ที่มีลักษณะคล้ายกระบอกสูบที่มีน้ำมันอยู่ภายใน เมื่อมีการเคลื่อนที่แดมเปอร์จะออกแรงต้านในทิศทางตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ ทำให้ระบบสูญเสียพลังงาน สำหรับในระบบที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำก็จะหยุดเคลื่อนที่ในที่สุด



สำหรับ linear damper แรงที่เกิดขึ้นจากแดมเปอร์จะสัมพันธ์กับความเร็ว

$$F = b\dot{x}$$

ถ้าปลายทั้งสองข้างของแดมเปอร์มีการเคลื่อนที่ แรงที่เกิดขึ้นจากการต้านการเคลื่อนที่จะมีค่าแปรตามความเร็วในการยืด damper ออก $\left(\dot{x}-\dot{y}\right)$ ดังนั้นเราจะสามารถเขียนได้ว่า $F = b\left(\dot{x}-\dot{y}\right)$



สำหรับ torsional damper แรงที่เกิดขึ้นจากแดมเปอร์จะสัมพันธ์กับความเร็วเชิงมุม

$$\tau = b\dot{\theta}$$

3.2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

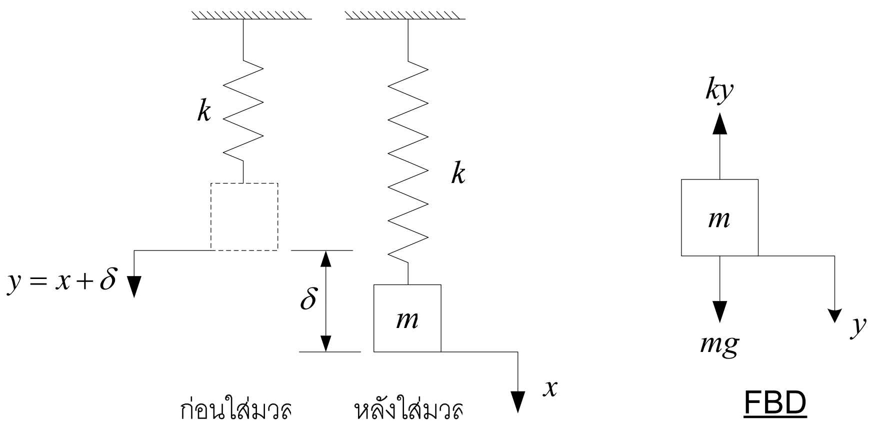
ในระดับปริญญาตรีเราได้เรียนวิชา Dynamics ซึ่งใช้ Newton's Law เป็นหลักสำคัญ ซึ่งนักศึกษาวิศวกรรมศาสตร์เกือบทุกสาขาจะต้องผ่านวิชานี้ อีกทั้งยังเหมาะกับการสร้างแบบจำลองของระบบส่วนมากที่ไม่ซับซ้อนจนเกินไป ดังนั้นในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการของ Newton นี้เท่านั้น กฎจะนำมาใช้ก็คือกฎข้อที่สอง สำหรับการไถล (translation) จะมีสมการว่า

$$\sum F = ma$$

และสำหรับการหมุน (rotation) จะมีสมการว่า

$$\sum T = J\alpha$$

3.2.1. **ระบบมวล-สปริง** (Mass-spring system)



จากรูป Free Body Diagram (FBD) ได้ $m\ddot{y} = -ky + mg$ (↓+)

แทนค่า $y = x + \delta$ จะได้ $m\ddot{x} = -k\left(x+\delta\right) + mg$

จัดรูปจะได้ $m\ddot{x} + kx = mg - k\delta$

โดยที่ δ คือระยะยืดของสปริง ในสภาวะสมดุล ซึ่งแรงดึงจากการยืดตัวของสปริงจะเท่ากับน้ำหนักของวัตถุ นั่นคือ

$$mg = k\delta$$

ดังนั้น $$m\ddot{x}+kx=0$$

จะเห็นว่า ถ้าเรากำหนดตำแหน่งของวัตถุ x โดยอ้างอิงจากตำแหน่งสมดุล (ไม่ใช่ตำแหน่งสปริงก่อนการยืดตัว) เราจะไม่ต้องคิดแรงโน้มถ่วงเลย ดังนั้นตั้งแต่นี้ไป หากไม่ได้ระบุเป็นพิเศษ ขอให้เข้าใจว่าเราจะกำหนดตำแหน่งของวัตถุโดยอ้างอิงจากตำแหน่งสมดุลเสมอ

การตอบสนองตามธรรมชาติของระบบมวล-สปริง

การตอบสนองตามธรรมชาติ (Natural response) คือการตอบสนองของระบบตามสภาวะเริ่มต้นที่กำหนดให้ หรือ initial conditions โดยไม่มี อินพุทมาเกี่ยวข้องตลอดระยะเวลา สำหรับระบบมวล-สปริงการตอบสนองจะอยู่ในรูปของการแกว่งจึงนิยมเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าเป็น *free vibration*

จากสมการของระบบมวล-สปริงคือ

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{3.1}$$

เราจะสามารถหาการตอบสนองได้โดยการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ในที่นี้เราจะใช้วิธีการลาปลาสดังนี้

$$m\left[s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right]+kX(s)=0$$
$$\left(ms^2+k\right)X(s)=msx(0)+m\dot{x}(0)$$
$$X(s)=\frac{s}{s^2+k/m}x(0)+\frac{1}{s^2+k/m}\dot{x}(0)$$

แปลงลาปลาสย้อนกลับได้

$$\begin{aligned}x(t)&=x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\\&=a\cos\theta+b\sin\theta\end{aligned}$$

โดยที่กำหนดให้ $a=x(0)$, $b=\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)$ และ $\theta=\sqrt{\frac{k}{m}}t$

ผลรวมของฟังก์ชัน sine และ cosine ก็ยังคงเป็นฟังก์ชัน sine ที่มีเฟสเปลี่ยนไปจากเดิมซึ่งสามารถแปลงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}a\cos\theta+b\sin\theta&=A\sin(\theta+\phi)\\&=A\sin\theta\cos\phi+A\cos\theta\sin\phi\end{aligned}$$

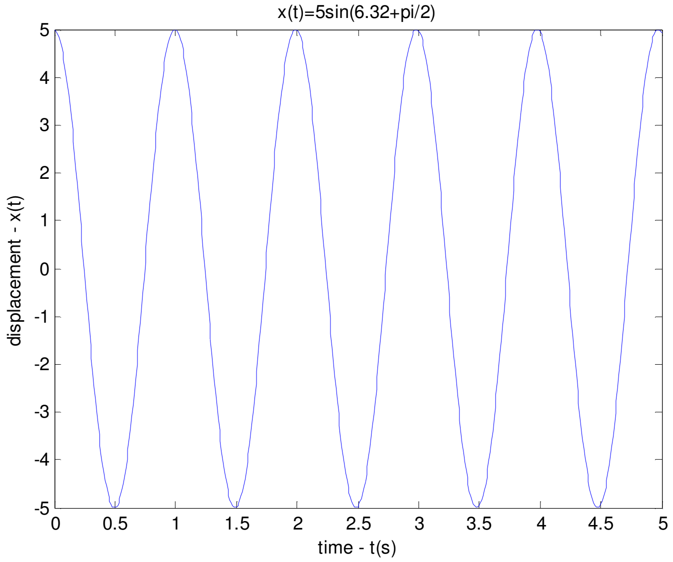
$$\left.\begin{aligned}A\sin\phi&=a\\A\cos\phi&=b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\phi=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}\\A=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta+\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$$

แทนค่าตัวแปรจะได้ว่า $x(t)=\sqrt{x^2(0)+\frac{m}{k}\dot{x}^2(0)}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\tan^{-1}\frac{x(0)}{\sqrt{m/k}\cdot\dot{x}(0)}\right)$

สมมติให้ initial condition เป็น $x(0)=5$ และ $\dot{x}(0)=0$ ซึ่งหมายความว่ามวลถูกดึงออกไปหนึ่งหน่วย แล้วถูกปล่อยจากหยุดนิ่ง สมมติเพิ่มเติมให้ $k=4$ N/m และ m = 0.1 kg จะได้การตอบสนองเป็น

$$\begin{aligned}x(t)&=5\sin\left(\sqrt{\frac{4}{0.1}}t+\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{0.1/4}\cdot 0}\right)\\&=5\sin(6.32t+\pi/2)\end{aligned}$$



ความถี่ของการตอบสนองตามธรรมชาติ (ไม่มีอินพุทมารบกวน) จะเรียกว่าเป็น*ความถี่ธรรมชาติ* หรือ *natural frequency*

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \ \text{rad/s}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \ \text{Hz}$$

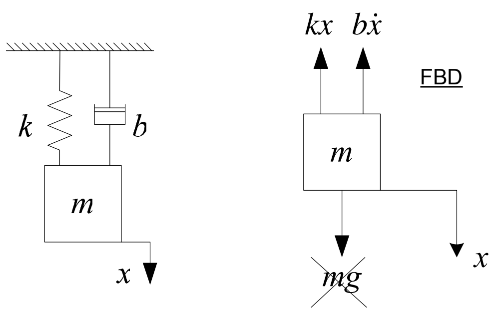
เนื่องจากในกรณีนี้เป็นการแกว่งที่ไม่มีแดมเปอร์มาเกี่ยวข้อง เราจึงเรียกความถี่ในการแกว่งนี้อีกอย่างหนึ่งเพื่อเป็นการเจาะจงว่า *undamped natural frequency* ในตัวอย่างข้างต้นนี้ $\omega_n = 6.32$ rad/s

จากสมการที่ (3.1) เราสามารถเขียนอยู่ในรูปของ ω_n ได้เป็น

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

ซึ่งเราสามารถใช้รูปสมการนี้ในการหาความถี่ธรรมชาติได้เลยโดยไม่ต้องหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์

3.2.2. **ระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์** (Mass-spring-damper system)



จาก FBD จะได้

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

ขอย้ำอีกครั้งว่า สาเหตุที่เราไม่ต้องคิดแรง *mg* เนื่องจากเรากำหนดตำแหน่ง y อ้างอิงจากตำแหน่งสมดุล ดังที่ได้อธิบายก่อนหน้านี้แล้ว

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

การตอบสนองตามธรรมชาติของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์

ระบบโดยทั่วไปแม้จะไม่มีแดมเปอร์ประกอบอยู่ แต่ก็มักจะมีคุณสมบัติของแดมเปอร์โดยธรรมชาติ เพราะหากไม่มีคุณสมบัติแดมเปอร์แล้ววัตถุที่เคลื่อนที่ ถ้าไม่มีแรงภายนอกมากระทำก็จะเคลื่อนที่ไปเรื่อยโดยไม่มีที่สิ้นสุด แต่ในระบบจริงทั้งหลายจะเห็นว่าแม้ว่าจะไม่มีแดมเปอร์ประกอบอยู่ด้วย แต่เมื่อเคลื่อนที่แล้ว ในที่สุดก็หยุดลงเองได้ในที่สุด แสดงว่าระบบทั้งหลายมีคุณสมบัติของแดมเปอร์แฝงอยู่ไม่มากก็น้อย เช่น อาจจะมีแรงเสียดทานของวัตถุหมุน (dry friction) หรือความหนืดของลูกปืนที่มีการหล่อลื่นด้วยของเหลว (viscous friction) เป็นต้น ซึ่งทำให้ระบบจำนวนมากใช้แบบจำลองมวล-สปริง-แดมเปอร์

การตอบสนองของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์สามารถจำแนกเป็นหลายแบบขึ้นกับขนาดแดมเปอร์ ถ้าแดมเปอร์อ่อน ระบบจะเกิดการแกว่ง (oscillatory) เป็นกราฟ sinusoidal คล้ายกับในระบบมวล-สปริง แต่แอมพลิจูดจะลดลงเรื่อยๆ ตามเวลาจนเป็นศูนย์ในที่สุด เราเรียกการตอบสนองในลักษณะนี้ว่าเป็น *underdamped* ถ้าระบบมีแดมเปอร์แข็งจะทำให้ระบบตอบสนองโดยไม่มีการแกว่งเกิดขึ้นเรียกการตอบสนองในลักษณะนี้ว่าเป็น *overdamped* ถ้าแดมเปอร์มีค่าความแข็งอยู่ระหว่างกลางทั้งสองแบบ กล่าวคือ มีแดมเปอร์ที่อ่อนที่สุดโดยที่ยังไม่ทำให้เกิดการแกว่ง เราเรียกการตอบสนองช่วงต่อนี้ว่าเป็นช่วงวิกฤติ หรือ *critically damped* การวิเคราะห์การตอบสนองทั้งสามแบบนี้โดยละเอียดจะได้กล่าวภายหลัง ในบทนี้เพียงแต่ให้เข้าใจหลักการคร่าวๆ และวิธีการหาการตอบสนองเท่านั้น

จากสมการของระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์คือ

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ เราจะสมมติว่าระบบมี $m = 0.1\ \mathrm{kg}$, $b = 0.4\ \mathrm{N \cdot s/m}$ และ $k = 4\ \mathrm{N/m}$ และมี initial conditions $\dot{x}(0) = 0$ และ $x(0) = x_0$

เราจะหาผลเฉลยของสมการนี้โดยใช้วิธีการลาปลาส

แปลงลาปลาสจะได้

$$0.1\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 4x = 0$$

$$\left[s^2 X(s) - sx(0) - \cancel{\dot{x}(0)}\right] + 4\left[sX(s) - x(0)\right] + 40X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 4s + 40\right)X(s) = sx_0 + 4x_0$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{(s+4)x_0}{s^2 + 4s + 40} \\
&= \frac{(s+4)x_0}{(s+2)^2 + 36} \\
&= \frac{(s+2)x_0}{(s+2)^2 + 6^2} + \frac{2x_0}{(s+2)^2 + 6^2} \\
&= x_0 \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2} + \frac{x_0}{3}\frac{6}{(s+2)^2 + 6^2}
\end{aligned}$$

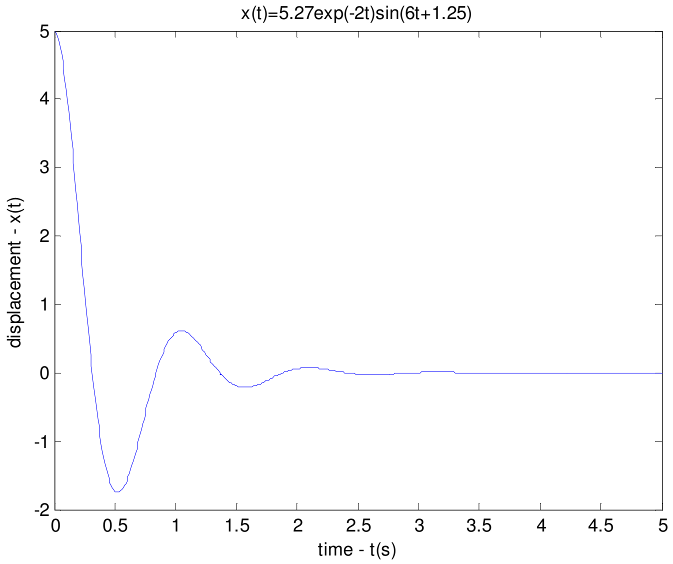
เนื่องจาก $L^{-1}\left[\dfrac{(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2}\right] = e^{-2t}\cos 6t$ และ $L^{-1}\left[\dfrac{6}{(s+2)^2 + 6^2}\right] = e^{-2t}\sin 6t$

ดังนั้นแปลงลาปลาสย้อนกลับจะได้

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{-2t}\cos 6t + \frac{x_0}{3}e^{-2t}\sin 6t \\
&= x_0 e^{-2t}\left(\cos 6t + \frac{1}{3}\sin 6t\right) \\
&= x_0 e^{-2t}\sqrt{1+\frac{1}{9}}\sin\left(6t + \tan^{-1}3\right)
\end{aligned}
$$

สมมติให้ $x_0 = 5$ เช่นเดียวกับในข้อที่ผ่านมาจะได้ว่า

$$x(t) = 5.27e^{-2t}\sin\left(6t + 1.25\right)$$



จะเห็นว่าแม้ว่าค่ามวล m และค่าความแข็งสปริง k จะเท่าเดิม แต่เมื่อมีแดมเปอร์เพิ่มเข้ามาทำให้การแกว่ง ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อมีแดมเปอร์ หรือที่เรียกว่า damped natural frequency $\omega_d = 6$ rad/s ซึ่งไม่เท่ากับกรณีที่ยังไม่มีแดมเปอร์ซึ่งมี undamped natural frequency $\omega_n = \sqrt{k/m} = 6.32$ rad/s

เราสามารถหาความถี่ในการแกว่งได้โดยไม่ต้องหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งหมด โดยการพิจารณาโพลของ $X(s)$ (ซึ่งก็คือ auxiliary equation ของสมการเชิงอนุพันธ์) ซึ่งโพลหาได้จากรากของสมการ

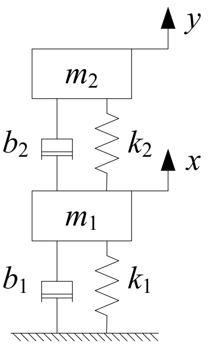
$$s^2 + 4s + 40 = 0$$

ซึ่งจะได้โพลเป็น

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-160}}{2} \\
&= -2 \pm 6i
\end{aligned}
$$

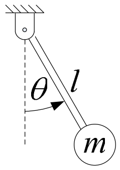
จะเห็นว่าค่าความถี่ในการแกว่งจะได้จากส่วนจินตภาพของโพล ในขณะที่ส่วนจริงของโพลจะบอกถึงแอมพลิจูดของการแกว่งที่ลดลงด้วยฟังก์ชัน e^{-2t} เราจะได้ศึกษารายละเอียดการตอบสนองของระบบในบทต่อๆ ไป

<u>ตัวอย่าง</u>



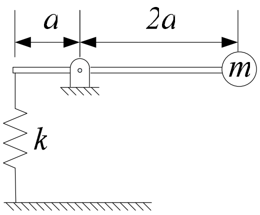
$$m_2\ddot{y}+b_2\dot{y}+k_2y=b_2\dot{x}+k_2x$$
$$m_1\ddot{x}+\left(b_1+b_2\right)\dot{x}+\left(k_1+k_2\right)x=b_2\dot{y}+k_2y$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และความถี่ธรรมชาติของลูกตุ้ม



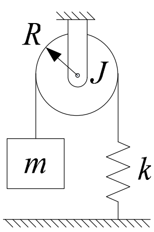
$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความถี่ธรรมชาติของระบบต่อไปนี้



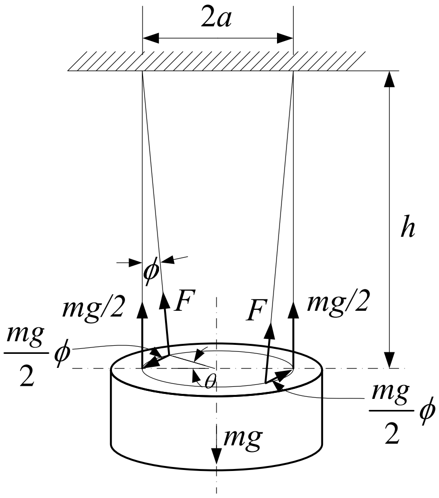
$$\omega_n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่แทนระบบในภาพ และหาความถี่ธรรมชาติของระบบ



$$\ddot{x}+\frac{kR^2}{J+mR^2}x=0$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{kR^2}{J+mR^2}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> วัตถุถูกแขวนด้วยเส้นลวดสองเส้นดังแสดงในรูป เมื่อถูกปล่อยจากตำแหน่งนี้ วัตถุจะแกว่งด้วยความถี่ธรรมชาติ ซึ่งวิธีการนี้สามารถใช้ในการหาค่า moment of intertia รอบแกนการหมุนของวัตถุด้วยการทดลองได้ โดยการวัดคาบของการแกว่ง T จงแสดงว่า Moment of inertia สามารถหาได้จากความสัมพันธ์



$$J = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{a^2 mg}{h}$$ □