

บทที่ 2 การแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation)

วัตถุประสงค์

เพื่อทบทวนวิธีการแปลงลาปลาซ โดยเมื่อศึกษาบทนี้แล้วนักศึกษาจะต้องสามารถ

1. เขียนฟังก์ชันของสัญญาณที่กำหนดให้โดยกราฟ และสามารถหาลาปลาซของฟังก์ชันดังกล่าวได้
2. แปลงลาปลาซย้อนกลับโดยใช้วิธี Partial-fraction Expansion ได้
3. แก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซได้

การแปลงลาปลาซเป็นพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดสำหรับการเรียนในวิชาการควบคุมอัตโนมัติ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่างๆ ได้มากมายเช่น ช่วยใน

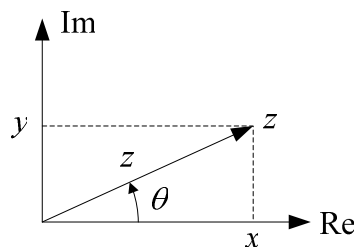
- การเขียนแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบในรูปแบบของตัวแปรลาปลาซ
- การแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อให้เข้าใจพฤติกรรมของระบบ ต่ออินพุทรูปแบบต่างๆ
- การออกแบบระบบควบคุม เป็นต้น

2.1. จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

$$j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = -1 \Rightarrow j^3 = -j \Rightarrow j^4 = 1$$

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $z = x + jy$ เราเรียก x ว่าเป็นส่วนจำนวนจริง (real) และ y เป็นส่วนจำนวนจินตภาพ (imaginary)

จำนวนเชิงซ้อนสามารถที่จะแทนด้วยเวกเตอร์ใน complex plane ได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ภาพแสดงขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อนใน complex plane

ขนาดหรือ magnitude ของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

มุมหรือ angle ของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\angle z = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Complex conjugate ของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z} = x - jy$ (สลับเครื่องหมายของส่วนจินตภาพ)

2.1.1. Euler's Theorem

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \tag{2.1}$$

สมการนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยการใช้ Taylor Series ดังต่อไปนี้

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots = 1 + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots = \frac{1}{j} \left[j\theta + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \frac{(j\theta)^7}{7!} + \dots \right]$$

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \dots$$

เนื่องจาก

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

จะได้ว่า

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \square$$

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่า

$$x = |z| \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = |z| \sin \theta$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ &= |z| \cos \theta + j|z| \sin \theta \\ &= |z| (\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= |z| e^{j\theta} \end{aligned}$$

ถ้าแทนค่า θ ด้วย $-\theta$ ลงในสมการ Euler เราจะได้สมการในอีกรูปหนึ่ง

$$e^{j(-\theta)} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (2.2)$$

จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) เราสามารถเขียน \sin และ \cos ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin \theta$$

2.1.2. Complex Algebra

การบวก: นำจำนวนจริงบวกกับจำนวนจริง จำนวนจินตภาพบวกกับจำนวนจินตภาพ เช่น

$$(2 + i) + (1 - 3i) = 3 - 2i$$

การลบ: เหมือนกับการบวกคือ นำจำนวนจริงลบกับจำนวนจริง จำนวนจินตภาพลบกับจำนวนจินตภาพ เช่น

$$(2 + i) - (1 - 3i) = 1 + 4i$$

การคูณ: นำทุกเทอมมาคูณไขว้กัน เช่น

$$(2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i + 3 = 5 - 5i$$

การหาร: .ให้ นำ complex conjugate ของส่วนมาคูณทั้งบนและล่าง เช่น

$$\frac{(2 + i)}{(1 - 3i)} = \frac{(2 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{2 + 6i + i + 3}{1 + 9} = \frac{-1 + 7i}{10}$$

2.2. การแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation)

กำหนดให้

$f(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่ง $f(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$

s เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (complex variable)

L เป็นการแปลงลาปลาซ

$F(s)$ คือลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$

ด้วยนิยามข้างต้น เราสามารถเขียนได้ว่า

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

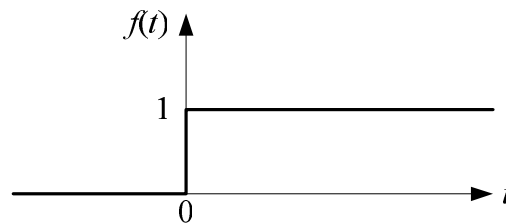
และในทางกลับกัน เราจะนิยามการแปลงลาปลาซย้อนกลับ (inverse Laplace) ได้เป็น

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

ต่อไปนี้จะเป็นการอธิบายการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่างๆ

2.2.1. Unit Step Function

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases}$$



$$L[\mathbf{1}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

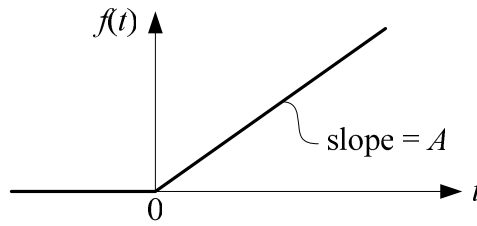
2.2.2. Step Function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ A & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

$$L[A] = \frac{A}{s}$$

2.2.3. Ramp Function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ At & \text{for } t > 0 \end{cases}$$



$$L[At] = A \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

ใช้การ integration by parts

$$\int u dv = uv - \int v du$$

โดยให้

$$u = t \Rightarrow du = dt \text{ และ } dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} te^{-st} dt &= \left. \frac{te^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= -\left. \frac{e^{-st}}{s^2} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L[At] = A \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{A}{s^2}$$

2.2.4. Exponential Function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

$$L[Ae^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha}$$

ฟังก์ชันต่อไปนี้จะไม่แสดงวิธีการหาแล้ว เนื่องจากไม่จำเป็นต้องจำวิธีพิสูจน์ให้ได้ในการเอาไปใช้งานจริง ที่ผ่านมาแสดงวิธีพิสูจน์เพียงเพื่อต้องการแสดงให้รู้วิธีการหาจะได้เข้าใจความเป็นมาเท่านั้น แต่ควรที่จะจำลาปลาซของฟังก์ชันทั้งหลายเหล่านี้ให้ได้ เพราะเป็นส่วนที่จะต้องนำไปใช้ต่อไปตลอดชีวิตนี้

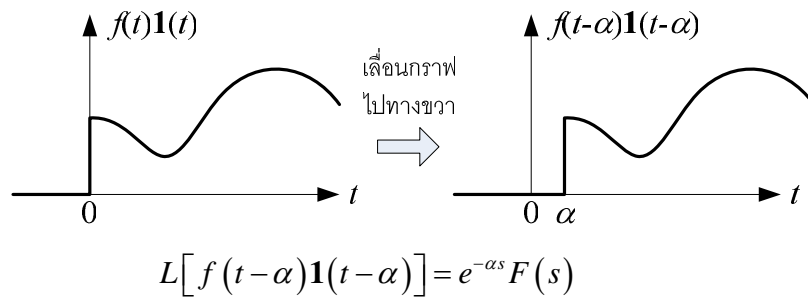
2.2.5. Sinusoidal Function

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

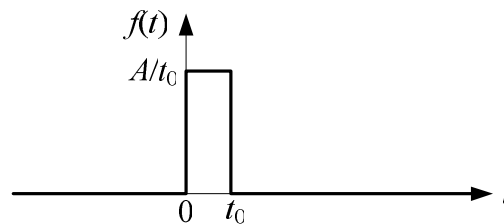
2.2.6. Translated Function

เป็นฟังก์ชันที่เลื่อนไปทางขวา หรืออาจจะมองว่าเป็นฟังก์ชันที่เริ่มต้นช้า (delay) จากเดิมไปเป็นเวลา α

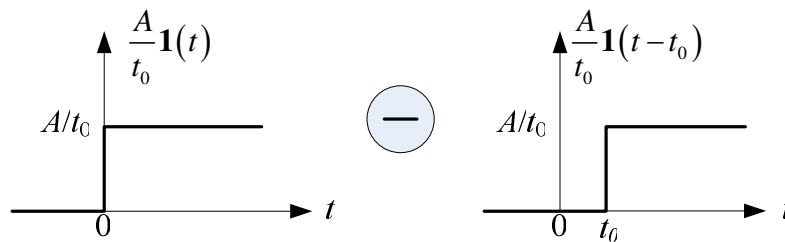


2.2.7. Pulse Function

$$f(t) = \begin{cases} A/t_0 & \text{for } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \text{ and } t_0 < t \end{cases}$$



ในที่นี้สังเกตว่า A คือ พื้นที่ใต้กราฟของ pulse function ซึ่งเราสามารถเขียนได้ในฟอร์มของ step function มาลบกันดังรูป



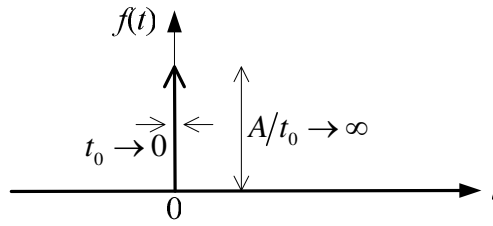
$$f(t) = \frac{A}{t_0} (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-t_0))$$

แปลงลาปลาซจะได้

$$L[f(t)] = \frac{A}{t_0} \left[\frac{1}{s} - e^{-st_0} \frac{1}{s} \right] = \frac{A}{st_0} (1 - e^{-st_0})$$

2.2.8. Impulse Function

Impulse function คือ pulse function ที่มีคุณสมบัติเฉพาะคือมีความกว้างเข้าใกล้ศูนย์ และความสูงเข้าใกล้อนันต์ แต่ยังคงมีพื้นที่เป็นค่าคงที่ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ลูกศรหัวตั้ง



$$\begin{aligned}
 L[f(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{st_0} (1 - e^{-st_0}) \\
 &= A \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{se^{-st_0}}{s} \\
 &= A
 \end{aligned}$$

2.2.9. Unit Impulse Function

คือ impulse function ที่มีพื้นที่ $A = 1$ มีสัญลักษณ์พิเศษคือ $\delta(t)$ ซึ่งมีลาปลาซคือ

$$L[\delta(t)] = 1$$

2.2.10. Multiplication of Function by Exponential

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$$

2.2.11. Differentiation

$$\begin{aligned}
 L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] &= sF(s) - f(0) \\
 L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] &= s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \\
 L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)
 \end{aligned}$$

2.2.12. Final Value Theorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

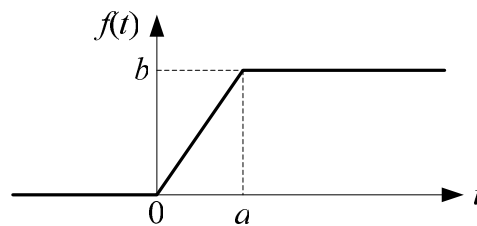
2.2.13. Initial Value Theorem

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$f(t)$	$F(s)$
Unit impulse $\delta(t)$	1
Unit step $\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$

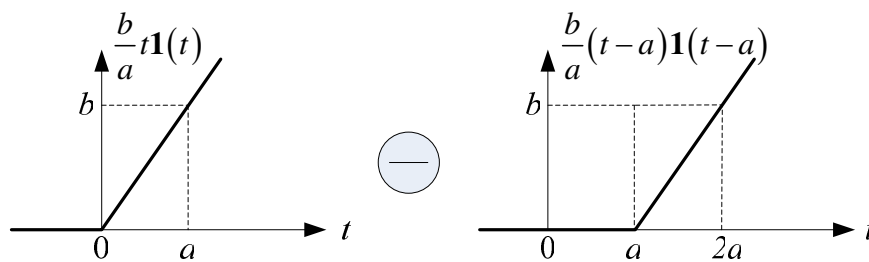
$t^n (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-\alpha)\mathbf{1}(t-\alpha)$	$e^{-as} F(s)$

ตัวอย่าง จงหาลาปลาซของฟังก์ชันที่แสดงโดยกราฟต่อไปนี้



วิธีทำ

เนื่องจากกราฟนี้สามารถแยกได้เป็นผลรวมของกราฟต่อไปนี้

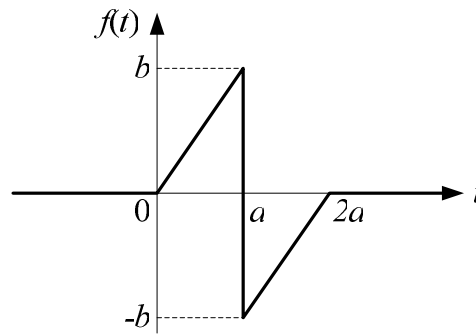


$$f(t) = \frac{b}{a}t\mathbf{1}(t) - \frac{b}{a}(t-a)\mathbf{1}(t-a)$$

$$F(s) = \frac{b}{a} \frac{1}{s^2} - \frac{b}{a} \frac{1}{s^2} e^{-as} = \frac{b}{as^2} (1 - e^{-as})$$

□

ตัวอย่าง จงหาลาปลาซของฟังก์ชันที่แสดงโดยกราฟต่อไปนี้



$$F(s) = \frac{b}{a} \frac{1}{s^2} - 2b \frac{e^{-as}}{s} - \frac{b}{a} \frac{e^{-2as}}{s^2}$$

□

2.3. การแปลงลาปลาซย้อนกลับ (Inverse Laplace Transformation)

การแปลงลาปลาซย้อนกลับคือ การหาฟังก์ชัน $f(t)$ ที่เมื่อแปลงลาปลาซแล้วจะได้ฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งเราจะใช้วิธีการเปิดตารางลาปลาซ หรือถ้าในกรณีที่ไม่อยู่ในรูปที่เปิดตารางได้ ก็จะต้องทำการแปลงฟังก์ชันให้อยู่ในรูปที่เรารู้ว่าสามารถเปิดตารางได้ก่อน แล้วจึงเปิดตาราง ซึ่งการที่จะแปลงฟังก์ชันนี้ จะใช้การแปลงลาปลาซให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย หรือที่เรียกว่า partial-fraction expansion

2.3.1. Partial-fraction Expansion

ปัญหาส่วนมากจะอยู่ในรูปของ

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

ซึ่ง $A(s)$ และ $B(s)$ เป็น polynomials ซึ่งในปัญหาทั่วไปอันดับของ $B(s)$ จะน้อยกว่าหรือเท่ากับของ $A(s)$

เราสามารถแยกตัวประกอบของ $A(s)$ และ $B(s)$ ได้เป็น

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

ซึ่ง p_1, p_2, \dots, p_n และ z_1, z_2, \dots, z_m จะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ เราเรียก $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ ซึ่งเป็นรากของ polynomial ตัวหารว่าเป็นโพล (poles) และเรียก $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ ซึ่งเป็นรากของ polynomial ตัวตั้งว่าเป็นซีโร (zeros)

ในการทำ partial-fraction expansion เราจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 โพลของระบบไม่ซ้ำกัน

เราจะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปฟอร์ม

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

โดยที่ a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้ง่ายโดยใช้เทคนิคต่อไปนี้ เช่นสมมติว่าเราต้องการหาค่า a_1

$$(s+p_1) \frac{B(s)}{A(s)} = a_1 + (s+p_1) \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + (s+p_1) \frac{a_n}{s+p_n}$$

แทนค่า $s = -p_1$ จะได้

$$a_1 = (s + p_1) \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s=-p_1}$$

ค่าคงที่ a_2, a_3, \dots, a_n ก็สามารถหาค่าได้ในลักษณะเดียวกันนี้

ซึ่งเมื่อเราแปลง inverse Laplace แล้วจะได้

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}$$

ตัวอย่าง จงหา inverse Laplace ของ $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad \square$$

ในกรณีที่โพลเป็นคู่ complex conjugate เราจะไม่แยกตัวประกอบของโพลคู่ นั้น เพราะไม่เช่นนั้นเมื่อเราแปลง inverse Laplace แล้วเราจะได้ฟังก์ชัน exponential ของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเพื่อให้ได้คำตอบเป็นจำนวนจริง เราจึงจัดตัวประกอบของโพลคู่ นั้นให้อยู่ในรูปของสมการ quadratic ซึ่งทำให้เมื่อแปลง inverse Laplace แล้วจะได้ฟังก์ชัน sinusoidal ของจำนวนจริง

ตัวอย่าง จงหา inverse Laplace ของ $F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$

$$f(t) = 2e^{-t} \cos 2t + 5e^{-t} \sin 2t \quad \square$$

ตัวอย่าง จงหา inverse Laplace ของ $F(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t) \quad \square$$

กรณีที่ 2 โพลของระบบซ้ำกัน

ในกรณีนี้เราจะแสดงวิธีการหา inverse Laplace โดยใช้ตัวอย่างในการอธิบาย

ตัวอย่าง จงหา inverse Laplace ของ $F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

$$F(s) = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{s+1}$$

ลองคูณทั้งสองข้างด้วย $(s+1)^3$ จะได้

$$(s+1)^3 F(s) = b_3 + b_2(s+1) + b_1(s+1)^2 \quad (2.3)$$

แทนค่า $s = -1$ จะได้

$$b_3 = \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1}$$

Differentiate ทั้งสองข้างของสมการ (2.3) เทียบกับตัวแปร s จะได้

$$\frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 F(s) \right] = b_2 + 2b_1(s+1) \quad (2.4)$$

เช่นเดิม แทนค่า แทนค่า $s = -1$ จะได้

$$b_2 = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1}$$

Differentiate ทั้งสองข้างของสมการ (2.4) เทียบกับตัวแปร s จะได้

$$\frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 F(s) \right] = 2b_1$$

เช่นเดิม แทนค่า แทนค่า $s = -1$ จะได้

$$2b_1 = \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1}$$

หรือ

$$b_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1} \quad (\text{Factorial ใส่ไว้เพื่อให้ใช้ได้ทุกกรณี})$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่า b_3, b_2, b_1 ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} b_3 &= \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1} \\ &= \left[s^2 + 2s + 3 \right]_{s=-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1} \\ &= \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= (2s + 2)_{s=-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 F(s) \right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[s^2 + 2s + 3 \right]_{s=-1} \\ &= \frac{2}{2!} = 1 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}$$

ดังนั้นจะได้

$$f(t) = (t^2 + 1)e^{-t} \quad \square$$

ตัวอย่าง จงหา inverse Laplace ของ $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2(s+1)}$

$$f(t) = 5t - 3 + 4e^{-t}$$

□

2.4. การแก้ Linear Time-Invariant Differential Equations ด้วย Laplace

มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แปลงลาปลาซ จะทำให้สมการ differential กลายเป็นสมการ algebraic
2. จัดให้สมการอยู่ในรูปของ dependent variable ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s
3. แปลงลาปลาซย้อนกลับ

ตัวอย่าง จงแก้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{3}{5} \left(1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right)$$

□