สูตรที่ให้สำหรับการสอบกลางภาค วิชา EGME206 Numerical Methods for Engineers

วิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2}$$

วิธีการวางตัวผิดที่ (False-position method)

$$x_1 = \frac{x_L f(x_R) - x_R f(x_L)}{f(x_R) - f(x_L)}$$

วิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

$$\Delta x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1}$$

วิธีเซแคนต์ (Secant method)

$$\Delta x = -\frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

การหารากของระบบสมการด้วยวิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

$$[\mathbf{J}]^k \{\mathbf{\Delta x}\}^{k+1} = -\{\mathbf{f}\}^k \text{ โดยที่ } J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\{\mathbf{x}\}^{k+1} = \{\mathbf{x}\}^k + \{\mathbf{\Delta x}\}^{k+1}$$

วิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition)

สำหรับเมทริกซ์ 3x3: $$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{U}]}$$

วิธีการแยกแบบโชเลซกี (Cholesky decomposition)

สำหรับเมทริกซ์ 3x3: $$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]^T}$$

ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton's divided differences)

$$f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + \ldots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

โดยที่

$$C_0 = f(x_0)$$

$$C_1 = f[x_1, x_0]$$

$$C_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$C_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_1,x_0]$	$f[x_2,x_1,x_0]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_2,x_1]$	$f[x_3,x_2,x_1]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_3,x_2]$		
x_3	$f[x_3]$			

ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ (Lagrange interpolation function)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad \text{โดยที่} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยการใช้เส้นตรง (Linear spline)

$$f_1(x) = f(x_0) + m_1(x - x_0) \text{ for } x_0 \le x \le x_1$$

$$f_2(x) = f(x_1) + m_2(x - x_1) \text{ for } x_1 \le x \le x_2$$

$$\vdots$$

$$\text{โดยที่ } m_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยการใช้เส้นโค้งกำลังสอง (Quadratic spline)

$$\left.\begin{aligned} a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= f(x_i) \\ a_{i+1} x_i^2 + b_{i+1} x_i + c_{i+1} &= f(x_i) \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, n-1 \;\Rightarrow\; 2(n-1) \text{ eqs}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n &= f(x_n) \end{aligned}\right\} 2 \text{ eqs}$$

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_i + b_{i+1}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \;\Rightarrow\; (n-1) \text{ eqs}$$

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; 1 \text{ eq}$$

การถดถอยแบบเชิงเส้น (Linear regression)

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{Bmatrix}$$

การถดถอยแบบพหุนาม (Polynomial regression)

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

การถดถอยแบบหลายเชิงแบบเชิงเส้น (Multiple linear regression)

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{ki} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{ki} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i \end{Bmatrix}$$