ข้อสอบกลางภาค ภาคการศึกษาปลาย ปีการศึกษา 2551

วิชา EGME206 Numerical Methods for Engineers

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร. อิทธิโชติ จักรไพวงศ์

<u>อ่านคำสั่งให้เข้าใจก่อนลงมือทำ</u>

1. ข้อสอบมี 7 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน ให้ทำทุกข้อ
2. ให้แสดงวิธีทำอย่างมีระเบียบเป็นขั้นตอนในสมุดคำตอบ
3. ใช้วิธีการที่กำหนดให้เท่านั้น คำตอบที่ถูกแต่ใช้วิธีการอื่นในการหาคำตอบ หรือไม่ได้แสดงวิธีการคิดจะไม่ได้คะแนน
4. ไม่อนุญาตให้นำหนังสือ สมุดจด หรือกระดาษใดๆ เข้าห้องสอบ
5. อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขรุ่น FX-115 เท่านั้น
6. กำหนดให้ใช้จำนวนทศนิยมอย่างน้อย 3 หลักในการคำนวณทุกข้อ
7. ไม่อนุญาตให้เข้าห้องน้ำ หากจำเป็นต้องเข้า ให้กรรมการคุมสอบเขียนว่า “เข้าห้องน้ำ ครั้งที่ x” ที่หน้าปกสมุดคำตอบ นักศึกษาจะถูกหักคะแนนครั้งละ 10% ของคะแนนที่ได้

---

1) จงใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection) และการวางตัวผิดที่ (False-Position) ในการหารากของสมการ

$$\sin x + x = 2$$ (ฟังก์ชัน sin ต้องใช้หน่วยเป็น radian)

โดยกำหนดให้ใช้ช่วงเริ่มต้นระหว่าง $x = 0$ และ $x = 2$ โดยให้ทำซ้ำ 2 ครั้ง พร้อมทั้งคำนวณค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ (ครั้งที่ 2) และเขียนสรุปคำตอบที่ได้จากการทำซ้ำแต่ละครั้งลงในตารางดังนี้

	วิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection)		วิธีการวางตัวผิดที่ (False-Position)	
	ค่าที่ได้	% ความผิดพลาด	ค่าที่ได้	% ความผิดพลาด
ครั้งที่ 1				
ครั้งที่ 2				

2) จงใช้วิธีของเซแคนต์ (Secant) ในการหารากของสมการ $x^2 + 2x - 10 = 0$ โดยกำหนดค่าเริ่มต้นให้ที่ $x_0 = 0$ และ $x_1 = 1$ และให้ทำซ้ำ 2 ครั้ง และในการทำซ้ำแต่ละครั้งให้คำนวณค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ด้วย โดยสรุปคำตอบเป็นตารางดังนี้

	ค่าที่ได้	% ความผิดพลาด
ครั้งที่ 1		
ครั้งที่ 2		

3) จงใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ในการหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

$$x - 2y = 0$$

$$x^2 - 3y = 1$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น x = 0 และ y = 0 ให้ทำซ้ำ 2 ครั้ง และสรุปคำตอบเป็นตารางดังนี้

	x	y
ครั้งที่ 1		
ครั้งที่ 2		

4) จงใช้ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition) ในการหารากของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5) จงใช้วิธีของเกาส์-ชอร์ดอง (Gauss-Jordan) ในการหาค่า inverse ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) ตารางแสดงค่าความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและแรงดันไฟฟ้าของเซนเซอร์ชนิดหนึ่งดังนี้

อุณหภูมิ ($^\circ$C)	แรงดันไฟฟ้า (mV)
0	3.0
10	5.5
20	9.0

จงใช้การประมาณค่าในช่วงโดยใช้ข้อมูล 3 จุดที่ให้นี้ (quadratic interpolation) ในการประมาณค่าแรงดันไฟฟ้าที่อุณหภูมิ 15 $^\circ$C โดยใช้ผลต่างการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton's divided differences)

7) จงหาฟังก์ชันในรูปแบบ $y = ax^b$ ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่กำหนดให้ในตารางต่อไปนี้ โดยใช้วิธีการถดถอยเชิงเส้น (linear regression)

x	1	2	3	4
y	1	4	7	10

สูตรที่ให้สำหรับการสอบกลางภาค

วิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2}$$

วิธีการวางตัวผิดที่ (False-position method)

$$x_1 = \frac{x_L f(x_R) - x_R f(x_L)}{f(x_R) - f(x_L)}$$

วิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

$$\Delta x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1}$$

วิธีเซแคนต์ (Secant method)

$$\Delta x = -\frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

การหารากของระบบสมการด้วยวิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

$$[\mathbf{J}]^k \{\mathbf{\Delta x}\}^{k+1} = -\{\mathbf{f}\}^k \text{ โดยที่ } J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\{\mathbf{x}\}^{k+1} = \{\mathbf{x}\}^k + \{\mathbf{\Delta x}\}^{k+1}$$

วิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition)

$$\text{สำหรับเมทริกซ์ 3x3: } \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{U}]}$$

วิธีการแยกแบบโชเลซกี (Cholesky decomposition)

$$\text{สำหรับเมทริกซ์ 3x3: } \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{L}]^T}$$

ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton's divided differences)

$$f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + \ldots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

โดยที่

$$C_0 = f(x_0)$$

$$C_1 = f[x_1, x_0]$$

$$C_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$C_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_1,x_0]$	$f[x_2,x_1,x_0]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_2,x_1]$	$f[x_3,x_2,x_1]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_3,x_2]$		
x_3	$f[x_3]$			

ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ (Lagrange interpolation function)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad \text{โดยที่} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยการใช้เส้นตรง (Linear spline)

$$f_1(x) = f(x_0) + m_1(x - x_0) \text{ for } x_0 \le x \le x_1$$

$$f_2(x) = f(x_1) + m_2(x - x_1) \text{ for } x_1 \le x \le x_2$$

$$\vdots$$

โดยที่ $m_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

การประมาณค่าในช่วงด้วยการใช้เส้นโค้งกำลังสอง (Quadratic spline)

$$\left.\begin{aligned} a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= f(x_i) \\ a_{i+1} x_i^2 + b_{i+1} x_i + c_{i+1} &= f(x_i) \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, n-1 \Rightarrow 2(n-1) \text{ eqs}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n &= f(x_n) \end{aligned}\right\} 2 \text{ eqs}$$

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_i + b_{i+1}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \Rightarrow (n-1) \text{ eqs}$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ eq}$$

การถดถอยแบบเชิงเส้น (Linear regression)

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{Bmatrix}$$

การถดถอยแบบพหุนาม (Polynomial regression)

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

<u>การถดถอยแบบหลายเชิงแบบเชิงเส้น (Multiple linear regression)</u>

สำหรับสมการ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{2i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{ki} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{ki} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i \end{Bmatrix}$$