สูตรที่ให้สำหรับการสอบปลายภาค วิชา EGME206 Numerical Methods for Engineers

<u>กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)</u>

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)}{2}\big(f(b)+f(a)\big)$$

<u>กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง (Multiple-application trapezoidal rule)</u>

$$I \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right] \text{ โดยที่ } h=\frac{b-a}{n} \text{ (n = จำนวนช่วง)}$$

<u>กฎของซิมป์สัน (Simpson's 1/3)</u>

$$I \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \text{ โดยที่ } h=\frac{b-a}{2}=\frac{x_2-x_0}{2}$$

<u>กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง (Multiple-application Simpson's 1/3)</u>

$$I \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)\right] \text{ โดยที่ } h=\frac{b-a}{n}=\frac{x_n-x_0}{n}$$

<u>กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน (Simpson's 3/8 rule)</u>

$$I \simeq \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] \text{ โดยที่ } h=\frac{b-a}{3}=\frac{x_3-x_0}{3}$$

<u>การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก (Romberg Integration)</u>

$$I=\frac{4^k I_M - I_L}{4^k-1}$$

<u>การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ (Gauss integration)</u>

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} W_i\, f(\xi_i)$$

n	$\pm\xi_i$	W_i
1	0.0000000000	2.0000000000
2	0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000	0.8888888889
	0.7745966692	0.5555555556
4	0.3399810436	0.6521451549
	0.8611363116	0.3478548451
5	0.0000000000	0.5688888889
	0.5384693101	0.4786286705
	0.9061798459	0.2369268850
6	0.2386191861	0.4679139346
	0.6612093865	0.3607615730
	0.9324695142	0.1713244924

การแปลงโคออร์ดิเนต (Coordinate transformation)

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} g(\xi)\,d\xi \text{ โดยที่ } x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi$$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's method)

สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

วิธีของฮวน (Heun's method)

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$$

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Modified Euler's method)

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

วิธีของรุงเงอ-คุททาอันดับสอง (2^{nd}-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

สำหรับ a_2, $a_1 = 1 - a_2$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

ถ้าเลือก $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Heun's method

$a_2 = 1 \Rightarrow$ Modified Euler's

วิธีของรุงเงอ-คุททาอันดับสาม (3^{rd}-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$

วิธีของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่ (4^{th}-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

สมการเอลลิปติก (Elliptic equation): วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-4T_{i,j}=0$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีแบบชัดแจ้ง (Explicit method)

$$\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T_i^{n+1}=\alpha T_{i+1}^n+\left(1-2\alpha\right)T_i^n+\alpha T_{i-1}^n \text{ โดยที่ } \alpha=\frac{k\left(\Delta t\right)}{\rho c\left(\Delta x\right)^2} \quad (\alpha < 1/2)$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีแบบปริยาย (Implicit method)

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1}+\left(1+2\alpha\right)T_i^{n+1}-\alpha T_{i+1}^{n+1}=T_i^n \text{ โดยที่ } \alpha=\frac{k\left(\Delta t\right)}{\rho c\left(\Delta x\right)^2}$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson method)

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1}+2\left(1+\alpha\right)T_i^{n+1}-\alpha T_{i+1}^{n+1}=\alpha T_{i+1}^n+2\left(1-\alpha\right)T_i^n+\alpha T_{i-1}^n \text{ โดยที่ } \alpha=\frac{k\left(\Delta t\right)}{\rho c\left(\Delta x\right)^2}$$

สมการไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equation): วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ โดยที่ } k^2=\frac{Tg}{w}$$

$$u_i^{n+1}=2u_i^n-u_i^{n-1}+C\left(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n\right) \text{ โดยที่ } C=\frac{k^2\left(\Delta t\right)^2}{\left(\Delta x\right)^2}$$

สำหรับกรณีที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เป็น $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t=0\right)=0$ และเลือก $C=1$

จะได้ $u_i^1=\frac{1}{2}\left(u_{i+1}^0+u_{i-1}^0\right)$ สำหรับ $n=0$

และ $u_i^{n+1}=-u_i^{n-1}+u_{i+1}^n+u_{i-1}^n$ สำหรับ $n>0$