

ข้อสอบปลายภาค ภาคการศึกษาปลาย ปีการศึกษา 2551

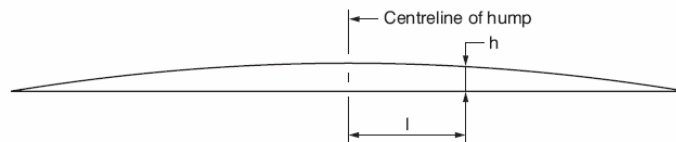
วิชา EGME206 Numerical Methods for Engineers

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร. อธิโชค จักรไพวงศ์

อ่านคำสั่งให้เข้าใจก่อนลงมือทำ

1. ข้อสอบมี 6 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน ให้ทำทุกข้อ
2. ให้แสดงวิธีทำอย่างมีระเบียบเป็นขั้นตอนในสมุดคำตอบ
3. ใช้วิธีการที่กำหนดให้เท่านั้น คำตอบที่ถูกแต่ใช้วิธีการอื่นในการหาคำตอบ หรือไม่ได้แสดงวิธีการคิดจะไม่ได้คะแนน
4. ไม่อนุญาตให้นำหนังสือ สมุดจด หรือกระดาษใดๆ เข้าห้องสอบ
5. อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขรุ่น FX-115 เท่านั้น
6. กำหนดให้ใช้จำนวนทศนิยมอย่างน้อย 3 หลักในการคำนวณทุกข้อ
7. ไม่อนุญาตให้เข้าห้องน้ำ หากจำเป็นต้องเข้า ให้กรรมการคุมสอบเขียนว่า “เข้าห้องน้ำ ครั้งที่ x” ที่หน้าปกสมุดคำตอบ นักศึกษาจะถูกหักคะแนนครั้งละ 10% ของคะแนนที่ได้

1) เนินชะลอความเร็วรถยนต์ (speed hump) ขนาดกว้าง 3.2 เมตร มีรูปร่างหน้าตัดดังแสดงในภาพข้างล่างนี้ และให้ตารางแสดงความสูง (h) ที่ระยะต่างๆ จากตำแหน่งกึ่งกลาง จงคำนวณหาพื้นที่หน้าตัดของเนินชะลอความเร็วโดยใช้วิธีการต่อไปนี้ (ให้ตอบหน่วยเป็นตารางเมตร)



l (m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
h (m)	0.100	0.095	0.090	0.081	0.071	0.058	0.043	0.025	0.000

1.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง

1.2 กฎเศษหนึ่งส่วนสาม (1/3) ของซิมป์สันแบบหลายช่วง

2) จงหาค่าอินทิกรัล $I = \int_0^2 e^x dx$ โดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

2.1 การอินทิกรัลแบบรอมเบิร์กสองครั้ง

2.2 การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ 4 จุด ($n = 4$)

3) จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุททาอันดับสี่เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \sin t, \quad y(0) = 1$$

กำหนดให้ใช้ความกว้างช่วง $h = 0.1$ และคำนวณผลเฉลยในช่วง $0 \leq t \leq 0.1$ และสรุปผลเฉลยในรูปของตารางดังต่อไปนี้

t	0.0	0.1
$y(t)$		

4) จงแปลงสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 2y' + y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

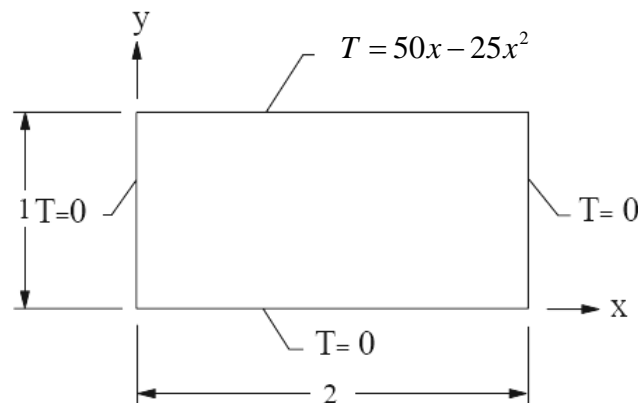
ให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แล้วจึงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการหาผลเฉลยในช่วง $0 \leq t \leq 1.0$ โดยกำหนดให้ใช้ความกว้างช่วง $h = 0.5$ และสรุปผลเฉลยในรูปของตารางดังนี้

t	0.0	0.5	1.0
$y(t)$			

5) จงผลเฉลยของสมการการนำความร้อนในแผ่นโลหะขนาด 2×1 หน่วย (สมการเอลลิปติก)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

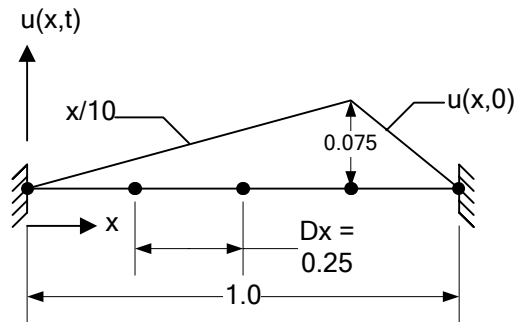
ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตกำหนดดังแสดงในรูป จงหาผลเฉลยโดยใช้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference) โดยใช้ $\Delta x = \Delta y = 0.50$



6) พิจารณาสมการการสั่นของเส้นลวดซึ่งขึงตึงที่ปลายทั้งสองข้าง (สมการไฮเพอร์โบลิก)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นดังแสดงในรูปต่อไปนี้



จงหาผลเฉลยโดยใช้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference) ในช่วง $0 \leq t \leq 0.50$ โดยกำหนดให้ค่า $k = 1$, $\Delta x = 0.25$ และเลือกค่า $C = 1$ (ซึ่งทำให้ได้ค่า $\Delta t = 0.25$) และสรุปคำตอบในรูปแบบของตารางดังตัวอย่างต่อไปนี้

$u(x,t)$	$x = 0.00$	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$
$t = 0.00$					
$t = 0.25$					
$t = 0.50$					

สูตรที่ให้สำหรับการสอบปลายภาค

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(b) + f(a))$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง (Multiple-application trapezoidal rule)

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \text{ โดยที่ } h = \frac{b-a}{n} \text{ (n = จำนวนช่วง)}$$

กฎของซิมป์สัน (Simpson's 1/3)

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \text{ โดยที่ } h = \frac{b-a}{2} = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง (Multiple-application Simpson's 1/3)

$$I \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right] \text{ โดยที่ } h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}$$

กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน (Simpson's 3/8 rule)

$$I \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \text{ โดยที่ } h = \frac{b-a}{3} = \frac{x_3 - x_0}{3}$$

การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก (Romberg Integration)

$$I = \frac{4^k I_M - I_L}{4^k - 1}$$

การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ (Gauss integration)

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i)$$

n	$\pm \xi_i$	W_i
1	0.0000000000	2.0000000000
2	0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000 0.7745966692	0.8888888889 0.5555555556
4	0.3399810436 0.8611363116	0.6521451549 0.3478548451
5	0.0000000000 0.5384693101 0.9061798459	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
6	0.2386191861 0.6612093865 0.9324695142	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

การแปลงโคออร์ดิเนต (Coordinate transformation)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \text{ โดยที่ } x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi$$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's method)

สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูปแบบ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

วิธีของฮวน (Heun's method)

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$$

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Modified Euler's method)

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

วิธีของรุงเงอ-คุตทาด้านอันดับสอง (2nd-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

สำหรับ a_2 , $a_1 = 1 - a_2$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

ถ้าเลือก $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Heun's method

$$a_2 = 1 \Rightarrow \text{Modified Euler's}$$

วิธีของรุงเงอ-คุตทาด้านอันดับสาม (3rd-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$

วิธีของรุงเงอ-คุตทาด้านอันดับสี่ (4th-order Runge-Kutta method)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

สมการเอลลิปติก (Elliptic equation): วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference method)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีแบบชัดเจน (Explicit method)

$$\frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T_i^{n+1} = \alpha T_{i+1}^n + (1-2\alpha)T_i^n + \alpha T_{i-1}^n \quad \text{โดยที่ } \alpha = \frac{k(\Delta t)}{\rho c(\Delta x)^2} \quad (\alpha < 1/2)$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีแบบปริยาย (Implicit method)

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + (1+2\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \quad \text{โดยที่ } \alpha = \frac{k(\Delta t)}{\rho c(\Delta x)^2}$$

สมการพาราโบลิก (Parabolic equation): วิธีของแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson method)

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + 2(1+\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = \alpha T_{i+1}^n + 2(1-\alpha)T_i^n + \alpha T_{i-1}^n \quad \text{โดยที่ } \alpha = \frac{k(\Delta t)}{\rho c(\Delta x)^2}$$

สมการไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equation): วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference method)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{โดยที่ } k^2 = \frac{Tg}{w}$$

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + C(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad \text{โดยที่ } C = \frac{k^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$$

สำหรับกรณีที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เป็น $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = 0$ และเลือก $C = 1$

จะได้ $u_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0)$ สำหรับ $n = 0$

และ $u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n$ สำหรับ $n > 0$